

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ  $1/n$ -РАЗЛОЖЕНИЯ

В.С.Попов, А.В.Сергеев\*

Институт теоретической и экспериментальной физики РАН  
117259 Москва, Россия\*Государственный оптический институт им. С.И.Вавилова  
199164 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 29 января 1993 г.

Показано, что асимптотика высших порядков  $1/n$ -разложения в квантовой механике является факториальной. Получена аналитическая формула для параметра асимптотики  $a$ . Рассмотрены потенциал Юкавы и задача об атоме водорода в электрическом и магнитном полях.

$1/n$ -разложение – новый метод в квантовой механике и теории поля, уже нашедший многочисленные применения (см., например, обзор <sup>1</sup>). В частности, этот метод успешно использовался для атома водорода в сильных электрическом и магнитном полях <sup>2-5</sup>, в задаче двух кулоновских центров <sup>6,7</sup> и так далее. В последнее время исследуется <sup>7,8</sup> вопрос об асимптотике высших порядков  $1/n$ -разложения, что имеет, помимо теоретического интереса, существенное значение при расчете атомных состояний со спектроскопической точностью. Ниже приводятся результаты для сферически-симметричных потенциалов, а также для задачи об атоме водорода в параллельных электрическом и магнитном полях.

Собственные значения энергии (комплексные, в случае квазистационарных состояний) представляются рядами по степеням "малого параметра"  $1/n$ :

$$\epsilon \equiv 2n^2 E_{nl} = \epsilon^{(0)} + \frac{\epsilon^{(1)}}{n} + \dots + \frac{\epsilon^{(k)}}{n^k} + \dots, \quad (1)$$

где  $n = n_r + 1 + 1$  – главное квантовое число ( $n_r = 0, 1, \dots$  фиксировано, а  $l \rightarrow \infty$ ),  $k$  – порядок  $1/n$ -разложения. В рассмотренных нами случаях асимптотика коэффициентов  $\epsilon^{(k)}$  имеет факториальный вид:

$$\epsilon^{(k)} \approx k! a^k k^\beta (c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \dots), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

либо

$$\epsilon^{(k)} \approx k! k^\beta \operatorname{Re}(c_0 a^k) [1 + O(1/k)], \quad (2')$$

где  $a, \beta, \dots$  – вычисляемые константы. Например <sup>1</sup>,

$$a^{-1} = 2^{3/2} \int_{r_0}^{r_2} [U(r) - \frac{1}{2} \epsilon^{(0)}]^{1/2} dr, \quad (3)$$

<sup>1</sup>) Аналогичную (хотя и более громоздкую) формулу можно получить и для предэкспоненциального множителя  $c_0$ . Приведенная энергия  $\epsilon^{(0)}$  соответствует минимуму потенциала  $U(r)$ , поэтому две точки поворота совпадают:  $r_0 = r_1$ , классически-разрешенная область сжимается в точку, а  $r_0 < r < r_2$  – подбарьерная область.

где  $U(r) = n^2 V(n^2 r) + 1/2r^2$  – эффективный потенциал, включающий центробежную энергию, а  $V(r)$  – исходный потенциал, входящий в уравнение Шредингера. Для связанных состояний точка поворота  $r_2$  уходит в комплексную плоскость, константы  $a$  и  $c_0$  являются, вообще говоря, комплексными, в силу чего коэффициенты  $1/n$ -разложения осциллируют при больших  $k$ :  $\epsilon^{(k)} \propto k! \cos(k\delta + \varphi)$ ,  $\delta = \arg a$ . Для квазистационарных состояний  $a$  и  $c_0$  вещественные,  $a > 0$ , то есть ряд (1) – знакопостоянный.

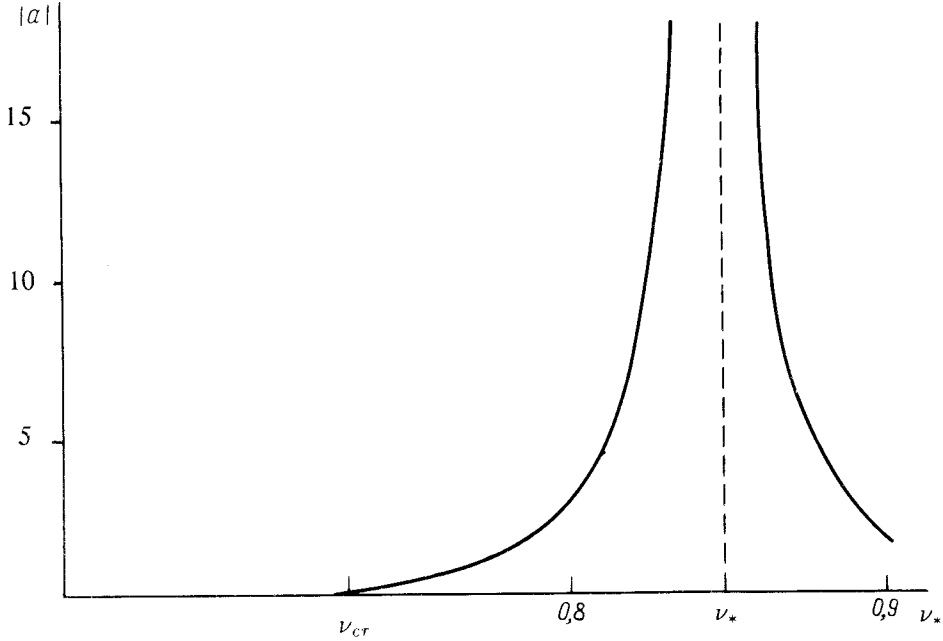


Рис.1. Зависимость параметра асимптотики  $a$  от  $\nu = n^2 \mu$  ( $\mu$  – параметр экранирования) для потенциала Юкавы

Рассмотрим для иллюстрации потенциал Юкавы, часто используемый в атомной и ядерной физике:  $V(r) = -r^{-1} \exp(-\mu r)$ ,  $\hbar = m = 1$  (см. рис.1). Значение  $\nu = \nu_{cr} = 0,7358$  соответствует выходу  $nl$ -уровня ( $n = l + 1 \gg 1$ ) в сплошной спектр ( $\nu = n^2 \mu$ ), а  $\nu_* = 0,8400$  – столкновению двух классических точек равновесия, после чего эффективный потенциал уже не имеет минимума при  $0 < r < \infty$ . В интервале  $0 < \nu < \nu_{cr}$ , соответствующем дискретному спектру, коэффициенты  $\epsilon^{(k)}(\nu)$  осциллируют при больших  $k$ , причем при  $\nu = 0,526$   $\delta = \pi/2$  и период осцилляций знака у  $\epsilon^{(k)}$  равен четырем. При  $\nu_{cr} < \nu < \nu_*$  параметр асимптотики  $a(\nu) > 0$  и имеет степенную особенность, когда  $\nu \rightarrow \nu_*$ :

$$a(\nu) = A(1 - \nu/\nu_*)^{-5/4} [1 + O((\nu_* - \nu)^{1/2})], \quad (4)$$

где  $A = 0,1116$ . Аналитическое продолжение в область  $\nu > \nu_*$  приводит к комплексным значениям  $a(\nu)$ . Это соответствует тому, что коэффициенты  $\epsilon^{(k)}(\nu)$  становятся здесь комплексными, что позволяет описать (суммированием нескольких первых членов  $1/n$ -разложения) не только сдвиг, но и ширину уровня<sup>3,5</sup>.

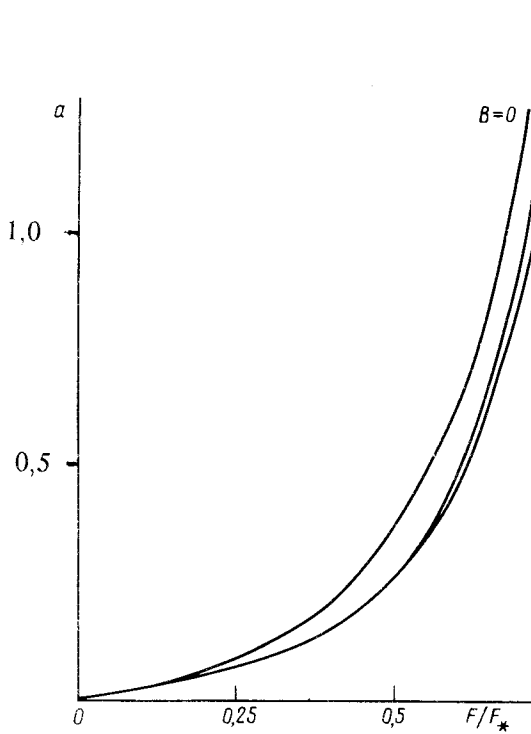


Рис. 2

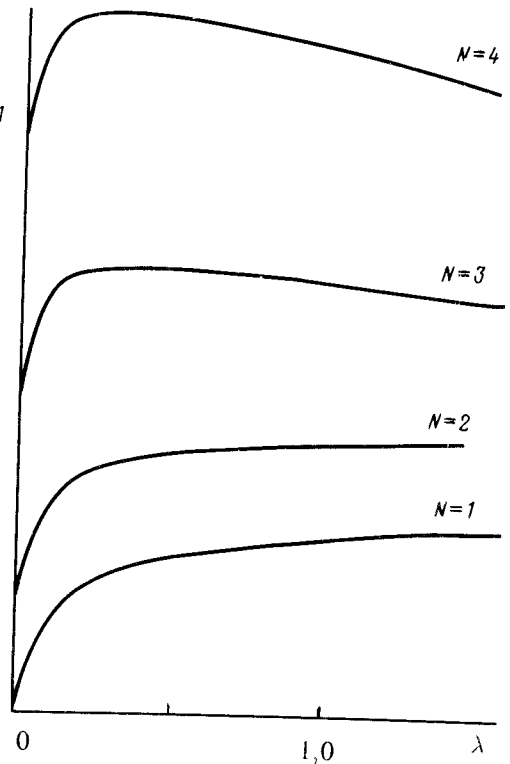


Рис. 3

Рис.2. То же, что на рис.1, для задачи об атоме водорода в электрическом и магнитном поле ( $F = n^4 \mathcal{E}$ , у кривых указаны значения  $B$ )

Рис.3. Параметр асимптотики (2') для потенциалов (7). Случай  $N = 1$  отвечает потенциалу воронки

Более сложной является задача об атоме водорода во внешних полях  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Мы рассмотрим случай однородных и параллельных полей и состояния с магнитным квантовым числом  $m = n - 1$ , отвечающие круговым орбитам электрона,  $1/n$ -разложение строится вокруг классической орбиты, радиус которой  $r_0 = r_0(F, B)$  определяется из уравнения

$$r(1 - F^2 r^4)^2 (1 + \frac{1}{4} B^2 r^3) = 1 \quad (5)$$

( $\hbar = m_e = e = 1$ ,  $F = n^4 \mathcal{E}$  и  $B = n^3 \mathcal{H}$  — "приведенные" переменные).

Кратко опишем вычисление параметра асимптотики  $a$ . С помощью численного интегрирования мы определили классическую траекторию  $r(t)$ , соединяющую точку максимума  $r_0 = (\rho_0, z_0)$  эффективного потенциала

$$-U(\mathbf{r}) = r^{-1} - (2\rho^2)^{-1} + Fz - \frac{1}{8} B^2 \rho^2$$

(взятого с обратным знаком, что соответствует списанию подбарьерного движения частицы в методе мнимого времени <sup>9)</sup> с точкой поворота  $r_2$ , лежащей

на изоэнергетической поверхности <sup>2)</sup>  $U(r) = U(r_0)$ , после чего параметр  $a$  в (2) вычисляется по формуле ( $t$  – мнимое время)

$$a = (2\text{Im}S)^{-1}, \quad S = \int_{r_0}^{r_2} p dr = \int_0^{\infty} r^2 dt. \quad (6)$$

Результаты представлены на рис.2, относящемся к полям  $F < F_*$ . Здесь  $F_*(B)$  – классический порог ионизации <sup>3,4</sup>, аналогичный  $\nu = \nu_*$  в случае потенциала Юкавы;  $F_*$  равно 0,2081, 0,2532 и 0,3449 при  $B$  равном 0, 0,5 и 1,0. Как и в предыдущем случае,  $a$  обращается в бесконечность при  $F \rightarrow F_*$ .

Для обобщенного потенциала воронки

$$V(r) = -1/r + g(r^N/N), \quad N > 0, \quad (7)$$

спектр дискретный, точка минимума  $r_0(g)$  существует при всех  $0 < g < \infty$ , а столкновения классических решений не происходит. Зависимость  $|a|$  от эффективной константы связи  $\lambda = n^{2N+2}g$  показана на рис.3.

Итак, асимптотика высших порядков  $1/n$ -разложения является факториальной (ср. с "феноменом Дайсона" <sup>10</sup> для обычной теории возмущений), и во многих случаях параметры асимптотики (2) могут быть найдены аналитически.

Авторы благодарны В.Д.Муру за полезное обсуждение.

- 
1. A.Chatterjee, Phys. Rep. **186**, 249 (1990).
  2. С.М.Бендер, Л.Д.Млодинов, and Н.Папанicolaou, Phys. Rev. A **25**, 1305 (1982).
  3. V.S.Попов, V.D.Мур, А.В.Щеблякин et al., Phys. Lett. A **124**, 77 (1987); A **149**, 418, 425 (1990).
  4. В.М.Вайнберг, В.С.Попов, А.В.Сергеев, ЖЭТФ **98**, 847 (1990).
  5. V.S.Попов, Dimensional Scaling in Chem. Phys. Ed. D.R.Herschbach, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993, p. 179, 217.
  6. В.Д.Мур, В.С.Попов, А.В.Сергеев, ЖЭТФ **97**, 32 (1990).
  7. M.Lopez-Cabrera, D.Z.Goodson, D.R.Herschbach et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1992 (1992).
  8. В.С.Попов, А.В.Щеблякин, Ядерная Физика **54**, 1582 (1991).
  9. А.М.Переломов, В.С.Попов, М.В.Терентьев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966).
  10. F.J.Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).

---

<sup>2)</sup> Эта поверхность является границей классически-разрешенной области, а рассматриваемая траектория электрона аналогична подбарьерной траектории инстантонного типа, соединяющей точки  $r_0$  и  $r_2$  в (3).