Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.1, стр.64 - 68 ©1993 г. 10 июля

АНТИСКОБКИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУТЯМ

А.П.Нерсесян[1)]

Лаборатория теоретической физики, ОИЯИ

141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 25 мая 1993 г.

Предложен прозрачный способ инвариантного описания эквивариантной локализации интегралов над фазовым пространством. Он использует нечетную симплектическую структуру, построенную над его касательным расслоением, и допускает прямое обобщение на случай интегралов по путям. Попутно получен метод суперсимметризации для широкого класса гамильтоновых систем.

1. В последнее время появился ряд работ (см., например, [1–3]), посвященных точному вычислению гамильтоновых интегралов по путям с помощью соответствующего обобщения [1] формулы локализации Дьюстермаата - Экмана [4] (DH-формулы). Согласно этой формуле, если на компактном многообразии M с симплектической структурой $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$ посредством гамильтониана $H(x)$ задано действие группы $U(1) \sim S^1$, то

$$Z_0 = \int\limits_M e^H(\omega)^N = \sum_{dH=0} \frac{e^H\sqrt{\det\omega_{ij}}}{\sqrt{\det\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial x^j}}}. \tag{1}$$

Ее обобщение на случай интегралов по путям позволяет локализовывать их в конечномерный интеграл над классическими траекториями фазового пространства.

Этот подход оказался плодотворным при рассмотрении ряда задач, в частности, в топологических теориях поля [2]. На нем основан новый, геометрический метод описания суперсимметричных теорий [3].

В этой заметке мы предлагаем простой способ инвариантного описания DH-локализации. Для этого, следуя [1-3], мы представим интеграл (1) в виде

$$Z_0 = \int\limits_M e^{H(x)}\det\omega_{ij}d^{2N}x = \int\limits_{\mathcal{M}} e^{H-F}d^{2N}xd^{2N}\theta, \tag{2}$$

где θ^i вспомогательные нечетные (грассмановы) поля $p(\theta^i) = p(x^i) + 1$, соответствующие 1-формам dx^i, $\mathcal{M}$-супермногообразие, ассоциированное касательному расслоению M ($z^A = (x^i, \theta^i)$ – локальные координаты на нем),

$$F(z) = -\frac{1}{2}\theta^i\omega_{ij}\theta^j. \tag{3}$$

Затем определим на $\mathcal{M}$ *нечетную симплектическую структуру*. Соответствующие ей градуированные (нечетные) скобки Пуассона (антискобки) позволяют дать гамильтоново описание (и естественную интерпретацию) необходимых структур без привлечения дополнительных конструкций, использовавшихся в цитированных работах.

[1)] E-mail: nersess@theor.jinrc.dubna.su

Попутно использование антискобок дает простой способ суперсимметризации для гамильтоновых систем, задающих изометрии римановой метрики на их фазовом пространстве.

Кроме того, предлагаемые конструкции прямо обобщаются на случай фазовых *суперпространств.*

Все конструкции, предлагаемые в статье, относятся к конечномерным интегралам над компактным конечномерным фазовым пространством. Их обобщение на случай интегралов по путям можно совершить поднятием на пространство петель аналогично [1-3]. Оно не вносит принципиальных изменений в схему описания.

Отметим, что предлагаемый способ описания тесно связан с методом квантования Баталина-Вилковиского [5].

2. Определим на суперпространстве $\mathcal{M}$, описанном в п.1, нечетную симплектическую структуру

$$\Omega_1 = \omega_{ij} dx^i \wedge d\theta^j + \omega_{ij,k}\theta^j dx^i \wedge dx^k, \tag{4}$$

где ω_{ij} соответствуют симплектической структуре на M. Соответствующие (4) нечетные скобки Пуассона (антискобки)

$$\{f, g\}_1 = \frac{\partial_r f}{\partial z^A}\Omega_1^{AB}\frac{\partial_l g}{\partial z^B} \tag{5}$$

определяются соотношениями

$$\{x^i, x^j\}_1 = 0, \quad \{x^i, \theta^j\}_1 = -\{\theta^j, x^i\}_1 = \omega^{ij}, \quad \{\theta^i, \theta^j\}_1 = -\{\theta^j, \theta^i\}_1 = \frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^k}\theta^k, \tag{6}$$

где $\omega^{ij}\omega_{jk} = \delta^i_k$. Антискобки (5) удовлетворяют тождеству Якоби

$$(-1)^{(p(f)+1)(p(h)+1)}\{f, \{g, h\}_1\}_1 + \mathrm{cycl.perm.(f, g, h)} = 0. \tag{7}$$

Зададим отображение функций над M на нечетные функции над $\mathcal{M}$:

$$f(x) \to Q_f(z) = \{f(x), F(z)\}_1,$$

где F определяется выражением (3). Оно вкладывает гамильтонову динамику $(H(x), \omega, M)$ в (нечетную) гамильтонову динамику $(Q, \Omega_1, \mathcal{M})$, где

$$Q = \{H, F\}_1, \tag{8}$$

с уравнениями движения

$$\frac{dx^i}{dt} = \{x^i, Q\}_1 = \{x^i, H_0\}_0 \equiv \xi^i_H, \quad \frac{d\theta^i}{dt} = \{\theta^i, Q\}_1 = \frac{\partial\xi^i_H}{\partial x^j}\theta^j. \tag{9}$$

Она суперсимметрична: из замкнутости ω следует $\{F, F\}_1 = 0$, и, учитывая (8), получаем простейшую супералгебру

$$\begin{gathered}\{H \pm F, H \pm F\}_1 = \pm 2Q, \\ \{H + F, H - F\}_1 = \{H \pm F, Q\}_1 = \{Q, Q\}_1 = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно соответствие:

$$
\begin{aligned}
&\{H,\ \}_1 = \xi^i_H \frac{\partial}{\partial\theta^i} \to i_H - \text{оператор внутреннего умножения на } \xi_H,\\
&\{F,\ \}_1 = \theta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \to d - \text{оператор внешнего дифференцирования},\\
&\{Q,\ \}_1 = \xi^i_H \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i_{H,k}\theta^k \frac{\partial}{\partial\theta^i} \to \mathcal{L}_H - \text{производная Ли вдоль } \xi_H.
\end{aligned} \tag{11}
$$

С учетом тождества Якоби (7) имеем

$$\{H, F\}_1 = Q \to di_H + i_H d = \mathcal{L}_H - \text{формула гомотопии.}$$

Как видим, суперсимметрия системы $(Q, \Omega_1, \mathcal{M})$ соответствует эквивариантному дифференцированию $d_H = d + i_H$.

Следуя работам [1,2], предположим, что на M определена также некоторая риманова метрика g_{ij} такая, что ξ^i_H является ее вектором Киллинга. Тогда нечетная функция

$$\tilde{Q} = \xi^i_H g_{ij}\theta^j \equiv \xi_i\theta^i \tag{12}$$

является интегралом движения (9):

$$\mathcal{L}_H g = 0 \to \{Q, \tilde{Q}\}_1 = 0. \tag{13}$$

Имеем также

$$\{F, \tilde{Q}\}_1 = -F_2, \quad \{H, \tilde{Q}\}_1 = H_2,$$

$$H_2 = \xi^i_H g_{ij}\xi^j_H, \quad F_2 = \frac{1}{2}\theta^i\omega_{(2)ij}\theta^j, \quad \omega_{(2)ij} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\xi_j}{\partial x^i}.$$

3. Продемонстрируем теперь вывод DH-формулы (1) с помощью предложенных конструкций.

Рассмотрим интеграл

$$Z_\lambda = \int\limits_{\mathcal{M}} \exp(H - F - \lambda\{H + F, \tilde{Q}\}_1) d^{4N}z, \tag{14}$$

где λ - произвольный числовой параметр.

Как и в п.1, $\mathcal{M}$ предполагается ассоциированным касательному расслоению компактного симплектического многообразия M. Предполагается также, что H задает действие $U(1)$ на M и что на нем определена риманова метрика g_{ij}, для которой ξ^i_H является вектором Киллинга.

Векторные поля (11) сохраняют "форму объема " $d^{4N}z = d^{2N}x d^{2N}\theta$. В силу (10), (13) имеем

$$\{H + F, e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1}\}_1 = 0, \quad \{Q, e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1}\}_1 = 0.$$

Следовательно интеграл (14) инвариантен относительно эквивариантных и лиевых преобразований вдоль ξ^i_H. Имеем также

$$\{Q, \tilde{Q}e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1}\}_1 = 0.$$

С учетом этих выражений и (эквивариантной версии) теоремы Стокса немедленно получаем:

$$\begin{aligned}\frac{dZ_\lambda}{d\lambda} &= \int_{\mathcal{M}} \{H+F,\tilde{Q}\}_1 e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1} d^{4N}z = \\ &= \int_{\mathcal{M}} \{H+F,\tilde{Q}e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1}\}_1 d^{4N}z - \\ &- \int_{\mathcal{M}} \tilde{Q}\{H+F,e^{H-F-\lambda\{H+F,\tilde{Q}\}_1}\}_1 d^{4N}z = 0\end{aligned}$$

Устремляя λ к бесконечности и учитывая, что

$$\delta(\xi^i_H) = \frac{1}{\pi^{2N}} \lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\lambda^{2N}\det g_{ij}\, e^{-\lambda\xi^i_H g_{ij}\xi^j_H}},$$

получаем формулу локализации Дьюстермаата-Экмана:

$$\begin{aligned}Z_0 &= \int_M e^H \sqrt{\det\omega_{ij}}\, d^{2N}x = \lim_{\alpha\to\infty}\int_{\mathcal{M}} e^{H-F-\lambda(H_2-F_2)} d^{4N}z = \\ &= \int_M e^H \delta(\xi_H)\sqrt{\det\omega_{ij}}\sqrt{\det\frac{\partial\xi^i_H}{\partial x^j}}\, d^{2N}x.\end{aligned}$$

Обобщение представленных конструкций на случай путевых интегралов производится их поднятием на пространство петель аналогично [1–3].

При этом $H \to \int A_i dx^i - H dt$ (где $dA = \omega$) , $\xi^i_H \to \xi^i_S = (\dot{x}^i - \xi^i_H)$, и путевой интеграл локализовывается в (конечномерный) интеграл над классическими траекториями.

Отметим, что представление интеграла в виде (2) позволяет придать ему вид, формально совпадающий с видом интеграла от дифференциальной формы на *супермногообразии* [6]. Кроме того, предложенные конструкции симметричны по отношению к четным и нечетным координатам. Поэтому их можно прямо распространить на случай, когда M является фазовым суперпространством.

4. Заметим, что если на M определена не только симплектическая, но и риманова структура, то мы можем построить на $\mathcal{M}$ также *четные симплектические структуры*

$$\Omega_\alpha = \frac{1}{2}(\omega_{(\alpha)ij} + R_{ijkl}\theta^k\theta^l)dx^i \wedge dx^j + g_{ij}D\theta^i \wedge D\theta^j, \quad \alpha = 0, 2,$$

где $D\theta^i = d\theta^i + \Gamma^i_{kl}\theta^k dx^l$, R_{ijkl} и Γ^i_{kl} – соответственно кривизна и сопряженная с метрикой g_{ij} связность на M, $\omega_{(0)ij} \equiv \omega_{ij}$.

Нетрудно увидеть, что $(H_0 + F_2, \Omega_0, \mathcal{M})$, $(H_2 + F_2, \Omega_2, \mathcal{M})$ и $(Q, \Omega^1, \mathcal{M})$ определяют одну и ту же суперсимметричную динамику (9).

Впервые пример суперсимметричной динамики с четной и нечетной гамильтоновыми структурами (одномерная механика Виттена) был рассмотрен Д.В.Волковым и другими [7]. Они рассматривались также в [8].

1. M.Blau, E.Keski-Vakkuri, and A.J.Niemi Phys. Lett. **246B**, 92 (1990).
2. A.J.Niemi and P.Pasanen, Phys. Lett. **253B**, 349 (1991); A.J.Niemi and O.Tirkkonen, Phys. Lett. **293B**, 339 (1992); A.Hietaki, A.Yu.Morozov, A.J.Niemi, and K.Palo, Phys. Lett. **B263**, 417 (1991).
3. A.Yu.Morozov, A.J.Niemi, and K.Palo, Phys. Lett. **B271**, 365 (1991); Nucl. Phys. **B377**, 295 (1992).
4. J.J.Duistermaat and G.J.Heckman, Inv. Math. **69**, 259 (1982); *ibid* **72**, 153 (1983).
5. I.A.Batalin and G.A.Vilkovisky, Phys. Lett., **102B**, 27 (1981); Nucl. Phys. **B234**, 106 (1984).
6. И.Н.Бернштейн, Д.А.Лейтес, Функ. анал. и его прил. **11**, 2, 70 (1977).
7. Д.В.Волков, А.И.Пашнев, В.А.Сорока, В.И.Ткач, Письма в ЖЭТФ **44**, 55 (1986).
8. O.M.Khudaverdian and A.P.Nersessian, J. Math. Phys., **32**, 1938 (1991); Preprint JINR E2-92-411; А.П.Нерсесян. Препринт ОИЯИ Р2-92-265 (принято ТМФ, 1993).