Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.4, стр.246 - 250 ©1993 г. 25 августа

СУПЕРСИММЕТРИЯ И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ НА РАССТОЯНИИ

А.А.Желтухин, В.В.Тугай

Харьковский физико-технический институт,
310108 Харьков, Украина

Научный физико-технологический центр,
310145 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 13 июля 1993 г.

Рассмотрено объединение суперсимметрии и принципа "action-at-a-distance", ранее использованного Уиллером и Фейнманом для альтернативного описания классической электродинамики Максвелла. Показано, что такое объединение открывает возможность построения векторных и спинорных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла и Вейля с токами, из дифференциальных элементов спинорных координат мировых линий частиц в суперпространстве

В теории Уиллера–Фейнмана [1] электромагнитное поле a_μ возникает как вторичный объект, построенный из мировых координат заряженных релятивистских частиц. В случае двух частиц, движущихся по мировым линиям с координатами $x^\mu(t)$ и $y^\mu(\tau)$, потенциал a^μ действующего на частицу x^μ эффективного поля представляется в форме релятивистски- и репараметризационно-инвариантного интеграла [1]

$$a^\mu(x) = e\int d\tau \dot{y}^\mu(\tau)\delta(s_0^2), \tag{1}$$

где $\delta(s_0^2)$– δ-функция Дирака, зависящая от квадрата релятивистского интервала $s_0^\mu \equiv x^\mu - y^\mu(\tau)$ между рассматриваемыми частицами, а e – электрический заряд частиц. Эффективное поле (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла и условию лоренцевой калибровки

$$\partial^\mu f_{\mu\nu}(x) = -4\pi j_\nu(x), \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu f^{\rho\sigma}(x) = 0, \quad \partial^\mu a_\mu(x) = 0, \tag{2}$$

а ток $j^\mu(x)$ определяется известным выражением

$$j^\mu(x) = e\int dy^\mu \delta^{(4)}(s_0). \tag{3}$$

Представляет интерес рассмотреть подход Фейнмана–Уиллера совместно с принципом суперсимметрии [2–4]. Для этого естественно перейти от мировых координат точки наблюдения x^μ к суперпространственным координатам $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$, вводя дополнительные грассмановы спинорные координаты $(\theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$ в вейлевском представлении. Аналогично, от мировых координат частицы-источника следует перейти к суперкоординатам $\zeta^M = (y^\mu(\tau), \xi^\alpha(\tau), \bar\xi_{\dot\alpha}(\tau))$. Преобразования суперсимметрии для координат z^M и ζ^M имеют вид

$$\delta x^\mu = i\theta\sigma^\mu\bar\epsilon - i\epsilon\sigma^\mu\bar\theta, \quad \delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha, \quad \delta\bar\theta_{\dot\alpha} = \bar\epsilon_{\dot\alpha}$$

$$\delta y^\mu = i\xi\sigma^\mu\bar\epsilon - i\epsilon\sigma^\mu\bar\xi, \quad \delta\xi^\alpha = \epsilon^\alpha, \quad \delta\bar\xi_{\dot\alpha} = \bar\epsilon_{\dot\alpha}. \tag{4}$$

Поэтому для суперсимметричного обобщения представления (1) было бы достаточно заменить скорости $\dot{y}^\mu(\tau)$ и интервалы s_0^μ на соответствующие величины, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии (4). Простейшим обобщением такого типа является обобщение, использующее замену:

$$\dot{y}^\mu \mapsto \omega_\tau^\mu = \dot{y}^\mu - i(\dot{\xi}\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\dot{\bar{\xi}}),$$

$$s_0^\mu \mapsto s^\mu = x^\mu - y^\mu - i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\bar{\theta}). \tag{5}$$

Здесь мы, однако, воспользуемся другой возможностью обобщения скоростей и интервалов, которая позволяет прояснить физическую роль спинорных координат суперпространства. Предлагаемое суперсимметричное обобщение проводится с использованием замены:

$$\dot{y}^\mu \mapsto \dot{\xi}^\alpha,\ \dot{\bar{\xi}}^{\dot{\alpha}}, \qquad e \mapsto \mu,$$

$$s_0^\mu \mapsto s_L^\mu = x_L^\mu - y_R^\mu - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\xi},\ \ s_R^\mu = (s_L^\mu)^* = x_R^\mu - y_L^\mu + 2i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \tag{6}$$

где x_L^μ и y_L^μ — координаты в левом киральном базисе [3]

$$x_L^\mu \equiv x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \quad y_L^\mu \equiv y^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\xi}, \tag{7}$$

а x_R^μ и y_R^μ — комплексно сопряженные к ним координаты в правом киральном базисе:

$$x_R^\mu = (x_L^\mu)^* = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \quad y_R^\mu = (y_L^\mu)^* = y^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\xi}. \tag{8}$$

После подстановок (6) в интегральное представление (1) приходим к киральным суперполевым спинорным потенциалам:

$$A^\alpha = \mu\int d\tau\dot{\xi}^\alpha\delta(s_R^2), \quad \bar{A}^{\dot{\alpha}} = \mu\int d\tau\dot{\bar{\xi}}^{\dot{\alpha}}\delta(s_L^2), \tag{9}$$

где μ– константа с размерностью длины в системе ($h = c = 1$). Вследствие киральности суперполей A^α и $\bar{A}_{\dot{\alpha}}$

$$D_\alpha A_\beta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\rho\bar{\theta})_\alpha\partial_\rho\right)A_\beta = 0,$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{A}_{\dot{\beta}} \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i(\theta\sigma^\rho)_{\dot{\alpha}}\partial_\rho\right)\bar{A}_{\dot{\beta}} = 0,$$

автоматически выполняются суперполевые условия фиксации $U(1)$–калибровки:

$$D^\alpha A_\alpha = 0, \ \ \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{A}^{\dot{\alpha}} = 0, \tag{10}$$

которые играют ту же роль, что условие калибровки Лоренца в теории Уиллера – Фейнмана. Условия (10) оставляют свободу в суперполевых калибровочных преобразованиях

$$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \ \ A_\alpha' = A_\alpha + D_\alpha\Lambda, \ \ \bar{A}_{\dot{\alpha}}' = A_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda, \tag{11}$$

характеризуемых вещественным скалярным суперполем $\Lambda(x,\theta,\bar{\theta})$, ограниченным условиями

$$D^\alpha D_\alpha\Lambda = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Lambda = 0. \tag{12}$$

Введенные выше суперпотенциалы A^α и $\bar{A}_{\dot\alpha}$ (9), автоматически удовлетворяют двум первым уравнениям $F_{\alpha\beta} = F_{\dot\alpha\dot\beta} = 0$ из набора связей, налагаемого на суперполевые напряженности с целью устранения нефизических компонентных полей [3]. Из третьего уравнения

$$F_{\alpha\dot\beta} \equiv D_\alpha \bar{A}_{\dot\beta} + \bar{D}_{\dot\beta} A_\alpha + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} A_\mu = 0 \tag{13}$$

находим интегральное представление для векторного суперполевого потенциала $A_\mu(x, \theta, \bar\theta)$:

$$A^\mu = -\mu \int d\tau \Big(\dot{\bar\xi} \bar\sigma_{\mu\rho} (\bar\theta - \bar\xi) \partial^\rho \delta(s_L^2) + (\theta - \xi) \sigma_{\rho\mu} \dot\xi \partial^\rho \delta(s_R^2) \Big) +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \int d\tau \Big(\dot{\bar\xi} (\bar\theta - \bar\xi) \partial^\mu \delta(s_L^2) + (\theta - \xi) \dot\xi \partial^\mu \delta(s_R^2) \Big). \tag{14}$$

Из стандартной суперполевой теории калибровочных полей [3] хорошо известно, что оставшиеся после наложения перечисленных связей суперполевые напряженности выражаются через киральные суперполя W и $\bar W$, ограниченные дополнительными условиями $D_\alpha \bar W_{\dot\beta} = \bar D_{\dot\alpha} W_\beta = 0$, $DW - \bar D \bar W = 0$, посредством соотношений

$$F_{\mu\alpha} = i\sigma_{\mu\alpha\dot\beta} \bar W^{\dot\beta}, \quad F_{\mu\dot\alpha} = i W^\beta \sigma_{\mu\beta\dot\alpha}, \quad F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\bar D \bar\sigma_{\mu\nu} \bar W - D \sigma_{\mu\nu} W). \tag{15}$$

Воспользовавшись этими соотношениями и интегральными представлениями (9) и (14), нетрудно найти выражения для суперполей W и $\bar W$ через спинорные суперпотенциалы (9):

$$W^\alpha = \frac{i}{4} F_{\mu\dot\alpha} \bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} = \frac{1}{8} \bar D_{\dot\beta} \bar D^{\dot\beta} A^\alpha + \frac{i}{2} \partial^{\dot\alpha\alpha} \bar A_{\dot\alpha},$$

$$\bar W^{\dot\alpha} = \frac{i}{4} \bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} F_{\mu\alpha} = -\frac{1}{8} D^\beta D_\beta \bar A^{\dot\alpha} + \frac{i}{2} \partial^{\dot\alpha\alpha} A_\alpha. \tag{16}$$

Суперполя W и $\bar W$ описывают мультиплет $(1/2, 1)$, содержащий вспомогательное поле $D(x)$, $U(1)$-инвариантную напряженность $v_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} a_{\nu]}$ абелева векторного поля $a_\mu(x) = iA\mu(x, \theta, \bar\theta)|_{\theta=\bar\theta=0}$:

$$v_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} (\bar D \bar\sigma_{\mu\nu} \bar W - D \sigma_{\mu\nu} W)|_{\theta=\bar\theta=0} =$$

$$= i\mu \int d\tau \big(\dot{\bar\xi} \bar\sigma_{[\mu|\rho} \bar\xi \partial_{\nu]} \partial^\rho \delta(\widetilde{s_L}^2) + \xi \sigma_{[\rho|\mu} \dot\xi \partial_{\nu]} \partial^\rho \delta(\widetilde{s_R}^2) \big), \tag{17}$$

а также спинорные вейлевские поля $\lambda_\alpha(x)$, $\bar\lambda_{\dot\alpha}(x)$:

$$\lambda^\alpha(x) \equiv iW^\alpha|_{\theta=\bar\theta=0} = -\frac{1}{2} \mu \int d\tau \dot{\bar\xi}_{\dot\alpha} \partial^{\dot\alpha\alpha} \delta(\widetilde{s_L}^2),$$

$$\bar\lambda^{\dot\alpha}(x) \equiv -i\bar W^\alpha|_{\theta=\bar\theta=0} = \frac{1}{2} \mu \int d\tau \dot\xi_\alpha \partial^{\dot\alpha\alpha} \delta(\widetilde{s_R}^2), \tag{18}$$

где интервалы $\widetilde{s_L^\mu} \equiv s_L^\mu|_{\theta=\bar\theta=0} = x^\mu - y_R^\mu$, $\widetilde{s_R^\mu} \equiv s_R^\mu|_{\theta=\bar\theta=0} = x^\mu - y_L^\mu$, не зависят от θ и $\bar\theta$.

Векторное (17) и спинорные (18) поля удовлетворяют уравнениям Максвелла и Вейля с токами:

$$\partial_\mu v^{\mu\nu}(x) = J^{(2)\nu}(x), \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu v^{\rho\sigma}(x) = 0,$$

$$\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha}(x) = J^{(1)}_\alpha(x), \quad \partial^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha(x) = \bar J^{(1)\dot\alpha}(x), \tag{19}$$

Векторный и спинорные токи $J^{(2)}_\nu$, $J^{(1)}_\alpha$, $\bar J^{(1)}_{\dot\alpha}$, входящие в правые части (19), определяются выражениями

$$J^{(2)}_\mu(x) = -2\pi\mu i\int d\tau(\dot{\bar\xi}\bar\sigma_{\mu\rho}\bar\xi\partial^\rho\delta^{(4)}(\widetilde{s_L}) - \xi\sigma_{\rho\mu}\dot\xi\partial^\rho\delta^{(4)}(\widetilde{s_R})),$$

$$J^{(1)}_\alpha(x) = 2\pi\mu\int d\tau\dot\xi_\alpha\delta^{(4)}(\widetilde{s_R}), \quad \bar J^{(1)}_{\dot\alpha}(x) = -2\pi\mu\int d\tau\dot{\bar\xi}_{\dot\alpha}\delta^{(4)}(\widetilde{s_L}). \tag{20}$$

Уравнения (19) и (20) получаются дифференцированием представления (17), (18) и использованием суперсимметричного обобщения формулы Дирака [5]:

$$\Box\delta(\widetilde{s_L}^2) = -4\pi\delta^{(4)}(\widetilde{s^\mu_L}),$$

$$\Box\delta(\widetilde{s_R}^2) = -4\pi\delta^{(4)}(\widetilde{s^\mu_R}).$$

Аналогичным образом, для вспомогательного поля $D(x) = -\frac{1}{4}(DW + \bar D\bar W)|_{\theta=\bar\theta=0}$ получаем уравнение

$$D(x) = J^{(0)}(x), \qquad J^{(0)}(x) \equiv 2\pi\mu i\int d\tau(\dot\xi\xi\delta^{(4)}(\widetilde{s_R}) - \dot{\bar\xi}\bar\xi\delta^{(4)}(\widetilde{s_L})). \tag{21}$$

Уравнения (19), (20), (21) могут быть представлены в форме единого суперполевого уравнения для W и $\bar W$ (16):

$$D^\alpha W_\alpha + \bar D_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha} = \mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta) \tag{22}$$

с суперполевым током

$$\mathcal{J}(x,\theta,\bar\theta) = 8\pi\mu\int d\tau\Big(\dot\xi(\theta-\xi)\delta^{(4)}(s_R) - \dot{\bar\xi}(\bar\theta-\bar\xi)\delta^{(4)}(s_L)\Big), \tag{23}$$

компонентная запись которого дается выражением

$$\mathcal{J} \equiv -4J^{(0)} + 4\theta^\alpha J^{(1)}_\alpha - 4\bar\theta_{\dot\alpha}\bar J^{\dot\alpha(1)} - 8(\theta\sigma_\rho\bar\theta)J^{(2)\rho} -$$

$$-i\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}J^{(1)}_\alpha + i\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar J^{(1)\dot\alpha} + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box J_0 \tag{24}$$

с компонентами, определяемыми интегралами (20) и (21).

Из явного вида электромагнитного тока $J^{(2)}_\mu$ (20), содержащего генераторы $\sigma_{\mu\nu}$, $\bar\sigma_{\mu\nu}$ группы Лоренца $SO(3,1)$ в вейлевском спинорном представлении, вытекает возможность физической интерпретации размерной константы μ как величины аномального магнитного момента электрически нейтральной частицы[1]. Это позволяет рассматривать проведенное выше построение эффективного электромагнитного поля с использованием дифференциальных элементов спинорных координат суперчастиц как механизм, дуальный к механизму

[1] В настоящее время изучается проблема построения суперполевого действия, описывающего взаимодействия таких нейтральных суперчастиц

Уиллера – Фейнмана описания классической электродинамики Максвелла. Наличие такого дуализма явно прослеживается из сравнения как представлений (1) и (14), так и выражений для векторных токов (3) и (20). Его можно понимать как выражение своеобразной симметрии уравнений Максвелла по отношению к замене пар $(e,\ dy^{\mu})\ \longleftrightarrow\ (\mu, d\xi^{\alpha}, d\bar{\xi}_{\dot{\alpha}})$ в выражениях для эффективного электромагнитного поля и тока. Иными словами, аномальный магнитный момент μ играет по отношению к грассмановым спинорным мировым координатам ту же роль, что и электрический заряд e в обычном пространстве мировых координат. Связь грассмановых координат и аномального магнитного момента, близкая к рассматриваемой здесь, ранее отмечалась в [6] при обобщении механизма Калуцы – Клейна на суперпространство.

Другой новый момент, связанный с суперсимметричным обобщением принципа действия на расстоянии, состоит в возможности построения полей со спином половина из спинорных дифференциальных элементов мировых линий суперчастиц.

Авторы благодарят А.И.Ахиезера, Д.В.Волкова, И.Бандоса, Ю.Пересунько, А.Рекало, Ю.Степановского и В.Сороку за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

---

1. J.A.Wheller and R.P.Feynman. Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).
2. Д.В.Волков, В.П.Акулов, Письма в ЖЭТФ **16**, 621 (1972).
3. Ю.Весс, Дж.Беггер, Суперсимметрия и супергравитация, М.: Мир, 1986.
4. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу, УФН **117**, 637 (1975).
5. P.A.B.Dirac, Proc. Roy. Soc. **A167**, 148 (1938).
6. А.А.Желтухин. ТМФ **64**, 500 (1985); ЯФ **42**, 720 (1985); **46**, 1791 (1987).