РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

П И С Ь М А В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 58, ВЫПУСК 6
25 СЕНТЯБРЯ, 1993

Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.6, стр.399 - 402

КВАНТОВОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ИНФЛЯЦИИ

А.Т.Земляков

Институт теоретической физики АН Украины
252143 Киев, Украина

Поступила в редакцию 9 июля 1993 г.
После переработки 3 августа 1993 г.

В плоскости (a,φ) найдены траектории, описывающие эволюцию Вселенной в классически запрещенной области. Процесс туннелирования происходит таким образом, что значение потенциала скалярного поля $v(\varphi)$ увеличивается в "среднем" вдоль траектории туннелирования. Это обеспечивает необходимые начальные условия для инфляции классической Вселенной. Сравниваются вероятности различных траекторий туннелирования Вселенной.

Цель настоящей работы состоит в нахождении траекторий в плоскости (a,φ) (a – масштабный фактор, φ – однородное скалярное поле), вдоль которых Вселенная может туннелировать в классически запрещенной области $a < (2l^2 v)^{-1/2}$, $l^2 = 4\pi G/3$, G – постоянная Ньютона, $v(\varphi)$ – потенциал поля φ. Туннелирование в a-направлении обычно интерпретируется как квантовое рождение Вселенной [1-3]. В работах [4,5] найдена волновая функция $\Psi(a,\varphi)$, локализованная вблизи максимума потенциала $v(\varphi)$ и описывающая инфляцию классической Вселенной [6–8]. В этой работе представлены другие решения, которые также приводят к инфляции в классически разрешенной области. Можно показать [9], что в классически запрещенной области волновая функция локализована вдоль наиболее вероятных путей туннелирования (НВПТ), которые и следует определить.

Лагранжиан в модели минисуперпространства, зависящий от двух переменных – a и φ, имеет вид

$$L = (-g)^{1/2}\left\{\frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\varphi} - v(\varphi) - \frac{1}{16\pi G}R\right\} \tag{1}$$

(R – скаляр кривизны). Точка сверху означает дифференцирование по физическому времени. Лагранжиан (1) приводит к уравнению Уилера-де-Витта [10]

$$\left\{-l^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}+a^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-2va^4+l^{-2}a^2+\alpha a^{-2}\right\}\Psi(a,\varphi)=0, \tag{2}$$

α – постоянная, учитывающая возможные квантовые поправки [11]. В дальнейшем, если не оговорено особо, будем полагать $\alpha=0$.

В запрещенной области волновая функция сконцентрирована вдоль однопараметрического семейства полевых конфигураций $\varphi(\lambda(t))$, $a(\lambda(t))$. Посредством введения параметра λ динамика полей может быть сведена к динамике системы с одной степенью свободы $\lambda(t)$ [12,13]. Эффективный лагранжиан для $\lambda(t)$ находится посредством подстановки $\varphi=\varphi(\lambda(t))$, $a=a(\lambda(t))$ в лагранжиан (1):

$$L_{eff}=\frac{m(\lambda)\dot\lambda\dot\lambda}{2}-V(\lambda),$$

$$m(\lambda)=a^3\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-l^{-2}a^{-2}\left\{\frac{\partial a}{\partial\lambda}\right\}^2\right], \tag{3}$$

$$V(\lambda)=a^3\left[v(\varphi)-\frac{3}{8\pi G}a^{-2}\right].$$

Лагранжиан (3) выглядит точно так же, как квантово-механический лагранжиан с одной степенью свободы. Оператор Гамильтона для λ имеет вид

$$\hat H(\lambda)=-\frac{1}{2m(\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+V(\lambda). \tag{4}$$

Отметим, что "масса" $m(\lambda)$ не является положительно определенной. При $m(\lambda)>0$ классически запрещенная (разрешенная) область определяется условием $V(\lambda)>0\{V(\lambda)<0\}$. Если $m(\lambda)<0$, то классически запрещенная (разрешенная) область находится при $V(\lambda)<0\{V(\lambda)>0\}$. Отметим существенный момент: знак $m(\lambda)$ зависит не только от точки на (a,φ)-плоскости, но и от направления $\partial a/\partial\varphi$. По аналогии с одномерной квантовой механикой найдем вероятность P туннелирования в квазиклассическом приближении:

$$P\cong\exp(-S),\qquad S=\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\lambda[2mv]^{1/2}. \tag{5}$$

Затем мы ищем экстремум (минимум) S с тем, чтобы определить НВПТ. Условие $\delta S=0$ приводит к уравнениям Эйнштейна, записанным в мнимом времени τ, определенным через $\lambda:\ \partial\tau/\partial\lambda=[m/2V]^{1/2}$:

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial\tau^2}+3a^{-1}\frac{\partial a}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{\partial v}{\partial\varphi},$$

$$-a^{-2}\left[\frac{\partial a}{\partial\tau}\right]^2+a^{-2}=\frac{8\pi G}{3}\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right]^2+v(\varphi)\right\}. \tag{6}$$

Можно легко убедиться, что уравнения Эйнштейна в мнимом времени разрешимы только, если $\mathrm{sign}(m) = \mathrm{sign}(V)$, что совпадает с определением классически-запрещенной области, данным выше. И наоборот, уравнения Эйнштейна в реальном времени разрешимы только в классически-разрешенной области. Граница этих областей определяется уравнением $V(\lambda) = 0$.

Возьмем потенциал $v(\varphi)$ в форме $v(\varphi) = v_0 + 2^{-1}\mu^2\varphi^2$. Для малых значений a из второго уравнения (6) следует, что $a \approx \tau$. В этом приближении два линейно независимых решения имеют вид

$$\varphi_1 = \tau^{-1}J_1(|\mu|\tau), \quad \varphi_2 = \tau^{-1}N_1(|\mu|\tau), \quad \mu^2 < 0, \tag{7}$$

$$\varphi_1 = \tau^{-1}I_1(\mu\tau), \quad \varphi_2 = \tau^{-1}K_1(\mu\tau), \quad \mu^2 > 0; \tag{8}$$

J, N – функции Бесселя и Неймана, I, K – модифицированные функции Бесселя. Рассмотрим сначала случай $\mu^2 > 0$, то есть потенциал имеет минимум при $\varphi = 0$. Решение $\varphi_1 = \tau^{-1}I_1(\mu\tau)$ описывает кривую в плоскости (a, φ), которая начинается от некоторой точки $(a = 0, \varphi_{in})$ и затем уходит в область больших $|\varphi|$. Решение $\varphi_2 = \tau^{-1}K_1(\mu\tau)$ предполагает бесконечно большие начальные значения поля φ и поэтому должно быть исключено. Оно может иметь смысл, однако, когда $\alpha > 0$ в уравнении Уилера-де-Витта (2).

Рассмотрим теперь потенциал $v(\varphi)$, имеющий максимум при $\varphi = 0$. В этом случае только решение $\varphi_1 = \tau^{-1}J_1(|\mu|\tau)$ удовлетворяет условию конечности φ при $a = 0$. Это решение описывает кривую в плоскости (a, φ), которая начинается при некотором $v < v_{max}$ и затем приближается к вершине потенциала, где начинает осциллировать с затухающей амплитудой. Отметим, что решения φ_1 из (7), (8) удовлетворяют граничному условию $\partial\varphi/\partial a|_{a=0} = 0$. Описанные выше решения справедливы, покуда не нарушается аппроксимация $a \approx \tau$.

Определим теперь пути, которые слабо отклоняются от прямого пути. Прямой путь дается следующим решением системы (6):

$$\varphi = 0, \quad a(\tau) = \frac{\sin[(2l^2v)^{1/2}\tau]}{(2l^2v)^{1/2}}, \tag{9}$$

$v = v(0)$. Предположим, что $(1/2)[\partial\varphi/\partial\tau]^2 \ll v(0)$. Тогда, взяв для $a(\tau)$ выражение из (9), найдем решение для φ, конечное при $a = 0$:

$$\varphi = C\frac{d}{dx}P_\nu(x), \quad \nu = -\frac{1}{2} - \left[\frac{9}{4} - \frac{\mu^2}{2l^2v}\right]^{1/2}, \quad x = \cos[(2l^2v)^{1/2}\tau], \tag{10}$$

C – произвольная постоянная. Это решение является приближенным во всей области $0 < x < 1$ для малых C.

Оценим вероятности различных путей. Из выражения (5) получаем вероятность прямого пути (9):

$$P_0 \cong \exp(-S_0), \quad S_0 = 2/3l^4v(0). \tag{11}$$

Из формулы (5) следует, что в случае максимума потенциала ($\mu^2 < 0$) искривленный путь (7) или (10) менее вероятен чем, прямой. Для слабо искривленного пути имеем

$$S = S_0 - \mu^2\int a^3\varphi^2 d\tau. \tag{12}$$

Таким образом, если Вселенная рождается при $v = v_{max}$, то наиболее вероятная эволюция в классически-запрещенной области $a < (2l^2 v)^{-1/2}$ есть эволюция вдоль прямого пути (10). Вселенная, рождающаяся с $v = v_{max}$, может начать эволюцию в классически-запрещенной области с $\varphi = \varphi_{in}$, $v(\varphi_{in}) < v_{max}$ и затем приближаться к $v = v_{max}$ вдоль траектории $\varphi_1 = \tau^{-1} J_1(|\mu|\tau)$. Однако этот путь менее вероятен, чем прямой.

Рассмотрим рождение Вселенной с $v = v_{min}$, то есть вблизи минимума потенциала, и предположим, что запрещенная область начинается с $a_1 > 0$. Это соответствует $\alpha > 0$ в уравнении (2). Решение системы (6) есть линейная комбинация $\varphi_1 = \tau^{-1} I_1(\mu\tau)$ и $\varphi_2 = \tau^{-1} K_1(\mu\tau)$. Из выражения (5) для S следует, что наиболее вероятным является путь, проходящий через область больших значений потенциала $|v|$, следовательно, эволюция, описываемая путем φ_2, наиболее вероятна. Таким образом, показано, что НВПТ направлен в "среднем" в область больших значений потенциала скалярного поля $v(\varphi)$. Поэтому можно ожидать, что с наибольшей вероятностью поле φ после туннелирования будет локализовано или при $v = v_{max}$ или при больших значениях $v(\varphi)$. Так как в конечной стадии туннелирования путь φ_1 из (7) совпадает с (9), то он также приводит к инфляции в классической области. Следует отметить, что разные пути туннелирования приведут к различным возбуждениям неоднородных мод поля φ и, следовательно, к различным крупномасштабным возмущениям плотности энергии после окончания инфляции. Расчеты показывают, что для прямого (9) и слабо искривленных путей (10) рождение частиц незначительно и неоднородные моды в конце туннелирования оказываются в вакуумном состоянии. Однако для пути φ_2 из (8) следует ожидать значительного рождения частиц. Это может сказаться на предсказаниях спектра неоднородностей в модели хаотической инфляции.

Автор выражает благодарность Ю.В.Штанову за обсуждение результатов.

1. П.И.Фомин; Докл. Акад. Наук Укр. ССР **9A**, 1831 (1975).
2. Я.Б.Зельдович, Письма в Астр. Журнал **7**, 579 (1981).
3. Jonatan J.Halliwell, Introdactory lectures on quantum cosmology. CTP 1845 (1990) in Proc. of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes. edited by T.Piran (1990).
4. A.Vilenkin, Phys. Rev. **D33**, 3560 (1986).
5. A.Vilenkin, Phys. Rev. **D37**, 888 (1988).
6. A.Linde, Particle physics and inflationary cosmology. Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland. 1990.
7. Robert R. Brandenberger, Rev. Mod. Phys. **57**, 1 (1985).
8. L.P.Grishchuk, L.V.Rozhansky, Phys. Lett. **B234**, 9 (1990).
9. T.Banks, C.Bender, and T.T.Wu, Phys. Rev. **D8**, 3366 (1973).
10. B.S.Dewitt, Phys. Rev. **160**, 113 (1967).
11. S.W.Hawking, Nucl. Phys. **B239**, 257 (1984).
12. J.L.Gervas and B.Sakita, Phys. Rev. **D16**, 3507 (1977).
13. K.M.Bitar and S.J.Chang, Phys. Rev. **17**, 486 (1978).