

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДРОБЛЕНИЯ ПОЛЯ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ

П.Л.Ваньян

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН

117851 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 июля 1993 г.

После переработки 16 августа 1993 г.

Получена модельная плотность распределения вероятностей коэффициента дробления поля скорости диссипации энергии в развитых турбулентных течениях. Распределение, зависящее от одного свободного параметра, сравнивается с экспериментом.

Изучению мелкомасштабной структуры развитой гидродинамической турбулентности посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных исследований (см. обзорную часть [1,2]). Ни одна из существующих в настоящее время теоретических моделей, как отмечено в [3], не объясняет экспериментальные распределения коэффициента дробления поля диссипации из инерционного интервала, полученные в этой работе.

В предлагаемой работе показано, что результаты инвариантного вероятностного моделирования [2] скорости диссипации энергии в развитых турбулентных течениях несжимаемой жидкости могут быть удовлетворительно согласованы с экспериментом [3].

Для функции $\Phi(q, x)$ моментов нормированной диссипации в [2] получено модельное уравнение

$$\Phi'' + 2(\lambda_1 + \lambda_2 q)\Phi' + \lambda_3 q(q - 1)\Phi = 0. \quad (1)$$

Здесь $\Phi(q, x) = \langle \epsilon^q \rangle / \langle \epsilon \rangle^q$, угловые скобки обозначают вероятностное осреднение, ϵ – скорость диссипации кинетической энергии, штрихом обозначено дифференцирование по x , x – логарифм турбулентного числа Рейнольдса $Re = k^2 / \langle \epsilon \rangle \nu$, k – средняя энергия турбулентности, ν – коэффициент молекулярной вязкости. В общем случае коэффициенты λ_1 , λ_2 и λ_3 зависят от числа Рейнольдса.

Вывод [2] о невозможности существования конечной и отличной от нуля асимптотики параметров $\lambda_{1,2,3}$ при $x \rightarrow \infty$ опирался на неявное предположение о существовании у распределения вероятностей диссипации статистических моментов произвольных порядков (как положительных, так и отрицательных). При этом распределение коэффициента дробления в интервале масштабного подобия также не могло быть независимым от турбулентного числа Рейнольдса течения. Далее будет показано, что если моменты диссипации некоторых порядков не существуют (расходятся), то зависимость параметров распределения вероятностей коэффициента дробления от числа Рейнольдса в инерционном интервале не является необходимой, а сами распределения неплохо согласуются с экспериментом.

Рассмотрим, следуя [4], коэффициент дробления поля скорости диссипации турбулентной энергии $e_{r,m} = \langle \epsilon^r \rangle / \langle \epsilon \rangle^m$, при $r < m$, где $\langle \epsilon \rangle_r$ обозначает

диссипацию, осредненную по пространственной области с характерным линейным размером r . Если предположить, что в некотором интервале масштабного подобия (инерционном интервале) распределение коэффициента $e_{r,m}$ зависит только от отношения r/m , а последовательные дробления независимы, то [4]

$$\langle (e_{r,m})^q \rangle = (m/r)^{\mu_q} \quad \text{при} \quad \eta \ll r, m \ll L. \quad (2)$$

Здесь $\eta = \langle \epsilon \rangle^{-1/4} \nu^{3/4}$, $L = k^{3/2} / \langle \epsilon \rangle$ - соответственно внутренний колмогоровский и внешний масштабы турбулентности [5]. Параметр μ_q - универсальная функция q , не зависящая от числа Рейнольдса.

В работе [3] использовалась аналогичная коэффициенту $e_{r,m}$ величина $M(b) = e_{r,m}/b$, $b = m/r$. Из условия неотрицательности ϵ можно получить [4] $0 \leq M(b) \leq 1$.

Минимальный размер вихрей в турбулентном потоке $\sim \eta$, а осреднение поля ϵ по масштабу $\sim L$ можно считать совпадающим с $\langle \epsilon \rangle$. Из уравнения (2) найдем [2]

$$\Phi(q, x) \sim (L/\eta)^{\mu_q}.$$

Отношение внешнего масштаба к колмогоровскому совпадает с турбулентным числом Рейнольдса в степени $3/4$, тогда

$$\Phi(q, x) = C(q) \exp\{3/4 \mu_q x\}. \quad (3)$$

Если параметр μ_q не зависит от числа Рейнольдса, то, подставляя выражение (3) в уравнение (1), получим

$$\mu_q = \frac{4}{3} [-(\lambda_1 + \lambda_2 q) \pm ((\lambda_1 + \lambda_2 q)^2 - \lambda_3 q(q-1))^{1/2}], \quad (4)$$

причем параметры $\lambda_{1,2,3}$ - некоторые постоянные.

Пусть $P(M, b)$ - плотность распределения коэффициента дробления M . Из уравнения (2) и из ограничения на область значений M получим

$$\int_0^1 P(M, b) M^q dM = \exp\{\ln(b)(\mu_q - q)\}. \quad (5)$$

Коэффициент M ограничен сверху, поэтому у распределения $P(M, b)$ существуют статистические моменты всех положительных порядков. Тогда из уравнения (4) $\lambda_2^2 - \lambda_3 \geq 0$.

Рассмотрим плотность распределения вероятностей $G(Y, b)$ величины $Y = -\ln(M)$. Функции P и G связаны соотношением $P(M, b) = G(-\ln(M), b)/M$. Из уравнения (5) для функции $G(Y, b)$ получим

$$\int_0^\infty G(Y, b) e^{-qY} dY = \exp\{\ln(b)(\mu_q - q)\}. \quad (6)$$

Пусть $\lambda_2^2 - \lambda_3 > 0$, тогда при $q \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty G(Y, b) e^{-qY} dY \sim \exp\{-q \ln(b) [1 + \frac{4}{3} \lambda_2 \pm (\lambda_2^2 - \lambda_3)^{1/2}]\} (1 + \sum_{k=1}^\infty A_k q^{-k}),$$

а из свойств преобразования Лапласа [6] получим, что функция $G(Y)$, а следовательно, и функция $P(M)$ должны содержать сингулярность в виде δ -функции Дирака.

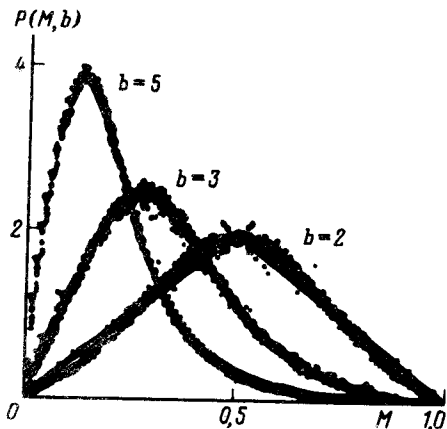


Рис.1

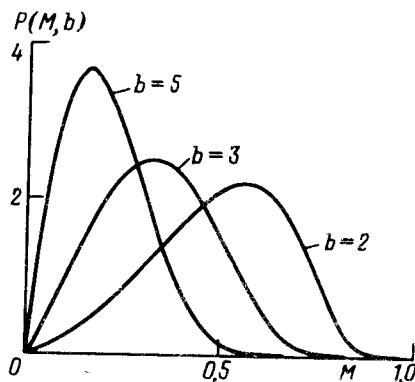


Рис.2

Рис.1. Плотности распределения коэффициента дробления M при различных значениях параметра дробления b по данным [3]. Сплошная кривая – треугольное распределение, предложенное в той же работе в качестве аппроксимации распределения при $b=2$

Рис.2. Плотности распределения коэффициента дробления M по формуле (9), $\lambda_1 = -3, 5$

На рис.1 представлены результаты экспериментального определения плотности распределения коэффициента M при различных значениях параметра b . Как видно, распределения $P(M, b)$ одномодальны и сингулярностей (в эксперименте проявляющихся в качестве второго острого максимума) не содержат. Поэтому заключаем, что

$$\lambda_2^2 - \lambda_3 = 0. \quad (7)$$

Из гипотезы о независимости дроблений [4] сразу получаем, что плотность G является безгранично делимой [7], то есть плотностью величины, которую можно представить в виде суммы произвольного числа независимых одинаково распределенных слагаемых. Необходимым и достаточным условием того, что функция $\varphi(q)$ является преобразованием Лапласа безгранично делимого распределения [7], является возможность представления

$$\varphi(q) = \exp\{-\Psi(q)\},$$

где $\Psi(0) = 0$, а функция $\frac{d}{dq}\Psi(q)$ – преобразование Лапласа некоторой неотрицательной меры. Тогда из уравнений (4), (6) и (7) можно получить, что в уравнении (4) из двух решений необходимо выбирать то, которое соответствует знаку “-” перед радикалом.

Результаты эксперимента [3], представленные на рис.1, свидетельствуют в пользу того, что функция $P(M, b)$ не обращается в тождественный нуль при некотором $0 < M_0 < 1$. В таком случае образ преобразования Лапласа [6] функции G не должен содержать экспоненциального по q множителя. Используя (4), найдем $\lambda_2 = -3/4$, а из уравнения (7) $\lambda_3 = 9/16$.

Окончательно для функции μ_q получим

$$\mu_q = \frac{4}{3}[-\lambda_1 + \frac{3}{4}q - (\lambda_1^2 + q(\frac{9}{16} - \frac{3}{2}\lambda_1))^{1/2}]. \quad (8)$$

Из очевидного нормировочного условия $\mu_0 = 0$ получим $\lambda_1 \leq 0$. Величина μ_q — действительная, поэтому из (8) следует

$$q \geq -\lambda_1^2 / (\frac{9}{16} - \frac{3}{2}\lambda_1).$$

Коэффициент λ_1 может быть связан с параметром перемежаемости μ . Если σ_r^2 — дисперсия логарифма $< \epsilon >_r$, то из (2) [1,2]

$$\sigma_r^2 = \mu \ln(L/r), \quad \mu = \left(\frac{d^2}{dq^2} \mu_q \right) |_{q=0},$$

а из уравнения (8)

$$\mu = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{8} - \lambda_1 \right)^2 / (-\lambda_1)^3.$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (6), найдем плотность безгранично делимого распределения $G(Y, b)$ (см. задачу 5 главы XIII в [7]). Переходя к переменной M , найдем плотность распределения коэффициента дробления $P(M, b)$:

$$P(M, b) = (2\pi)^{-1/2} \rho a Y^{-3/2} M^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\rho a Y^{-1/2} + \lambda_1 a^{-1} Y^{1/2}]^2\right\}; \quad (9)$$

здесь $\rho = \frac{4}{3} \ln(b)$, $a = (\frac{9}{32} - \frac{3}{4}\lambda_1)^{1/2}$, $Y = -\ln(M)$.

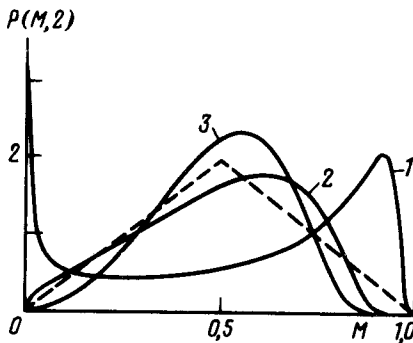


Рис.3. Плотность распределения коэффициента дробления M при $b = 2$. Кривые 1, 2, 3 получены по формуле (9) при $\lambda_1 = 0; -2; -4$. Штриховой линией изображено треугольное распределение

На рис.2 представлены плотности $P(M, b)$ по формуле (9) для значений $b = 2; 3; 5$. Для параметра λ_1 выбрано значение $\lambda_1 = -3, 5$, при этом $\mu \approx 0, 26$. На рис.3 представлены плотности распределения коэффициента дробления M при $b = 2$ и параметре λ_1 принимающем значения $\lambda_1 = 0; -2; -4$. Сравнение теоретических (рис.2) и экспериментальных (рис.1) кривых показывает удовлетворительное их согласие.

В заключение подчеркнем, что такие известные теоретические модели перемежаемости мелкомасштабной турбулентности, как логнормальная [8] β -модель

[9], случайная β -модель [10] и p -модель [1] не согласуются с экспериментальным распределением коэффициента дробления диссипации [3]. Найденное в работе распределение позволяет удовлетворительно описать распределение $P(M, b)$ коэффициента дробления поля диссипации M при различных значениях b с использованием единственного свободного параметра, в качестве которого может быть выбран параметр перемежаемости μ .

Следует отметить более быстрое стремление к нулю при $M \rightarrow 1$ модельных распределений по сравнению с измеренными. Нетрудно показать, что это приводит к завышению значений модельных структурных функций старших порядков поля скорости по сравнению с экспериментальными. Такое расхождение теоретических результатов с экспериментом, возможно, связано со слабой зависимостью распределения коэффициента дробления в интервале масштабного подобия от числа Рейнольдса течения, в настоящей работе не учитываемого.

-
1. C.Meneveau and K.R.Sreenivasan, *J. Fluid Mech.* **224**, 429 (1991).
 2. П.Л.Ваньян, *ЖЭТФ* **102**, 90 (1992).
 3. A.V.Chhabra and K.R.Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 2762 (1992).
 4. Е.А.Новиков, *Прикл. мат. и мех.* **35**, 266 (1971).
 5. А.С.Монин, А.М.Яглом, *Статистическая гидромеханика*, ч.2, М.: Наука, 1967.
 6. В.А.Диткин, А.П.Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, М.: Физматгиз, 1961.
 7. В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т.2, М.: Мир, 1984. (William Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II, NY: J.Wiley, 1971).
 8. A.N.Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
 9. U.Frish, P.L.Sulem, and M.Nelkin, *J. Fluid Mech.* **87**, 719 (1978).
 10. R.Benzi, G.Paladin, G.Parisi, and A.Vulpiani, *J. Phys.* **A17**, 3521 (1984).