Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.6, стр.462 - 465 ©1993 г. 25 сентября

СОГЛАСОВАННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА КВАНТОВЫХ ГРУППАХ $GL_q(2,C)$ И $SL_q(2,C)$

В.П.Акулов, В.Д.Гершун, А.И.Гуменчук

Харьковский физико-технический институт Украинской АН
310108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 22 июля 1993 г.

Построена согласованная дифференциальная геометрия на квантовых группах $GL_q(2,C)$ и $SL_q(2,C)$ и найдена алгебра векторных полей на основе требования коммутации квантового детерминанта с правыми и левыми 1-формами.

После работ Вороновича [1], Весса и Зумино [2,3] по дифференциальной геометрии на квантовых группах стало ясно, что в отличие от классических групп существует множество дифференциальных геометрий для квантовых групп. В настоящее время имеется целый ряд работ [4 – 9], посвященных уменьшению числа различных дифференциальных геометрий. В их основе лежит стремление сохранить какие-либо черты классических групп и дифференциальной геометрии на них - простоту деформированных перестановочных соотношений между параметрами группы и их дифференциалами, бикоивариантность относительно левого и правого умножения на группе и некоторые другие. При этом, различные дифференциальные геометрии на квантовой группе приводят к различным квантовым алгебрам для векторных полей и не все из них приводятся к виду Дринфельда-Джимбо [10,11]. Целью нашей работы является построение согласованной дифференциальной геометрии на квантовых группах $GL_q(2,C)$ и $SL_q(2,C)$.

Квантовая группа $GL_q(2,C)$ определяется коммутационными соотношениями между элементами группы:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{lll} ab = q\ ba, & bc = cb, & cd = q\ dc \\ ac = q\ ca, & bd = q\ db, & ad - da = (q - \frac{1}{q})bc \end{array}, \tag{1}$$

где q - комплексный параметр деформации перестановочных соотношений.

Важным элементом является квантовый детерминант

$$D \equiv \det_q g = ad - qbc = da - \frac{1}{q}bc, \tag{2}$$

который для группы $SL_q(2,C)$ равен 1. Детерминант коммутирует со всеми элементами группы: $D \cdot g = g \cdot D$.

Нашей целью является построение квантовой алгебры. Для этого необходимо ввести бесконечно-малую окрестность единицы группы δg и определить коммутационные соотношения между параметрами группы и дифференциалами или, что тоже самое, между параметрами группы и 1-формами, а также между 1-формами. Мы будем рассматривать одновременно правые формы $\omega = \delta g\ g^{-1}$ и левые формы $\theta = g^{-1}\delta g$.

Перестановочные соотношения будем находить из требования, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{array}{ll} \delta D = D\ \mathrm{Tr}_q\theta, & \delta D = \mathrm{Tr}_q\omega\ D, \\ D\theta = \theta D, & D\omega = \omega D, \end{array} \tag{3}$$

где $\mathrm{Tr}_q\omega$ и $\mathrm{Tr}_q\theta$ – квантовые шпуры матриц

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix},$$

которые надо еще определить. Мы используем обычный оператор внешнего дифференцирования δ, удовлетворяющий правилу Лейбница $(\delta(f \cdot g) = \delta f \cdot g + f \cdot \delta g)$, и условия $\theta_k^2 = 0$, $\omega_k^2 = 0, k = 1, 2, 3, 4$. Для группы $SL_q(2, C)$ $D = 1$, следовательно $\mathrm{Tr}_q\theta = \mathrm{Tr}_q\omega = 0$.

Наиболее общий вид перестановочных соотношений для левых форм и параметров группы, согласованный с (3), имеет вид

$$\begin{array}{ll} \theta_1 d = A \ \ d\theta_1 + B \ \ d\theta_4, & \theta_4 d = \tilde{A} \ \ d\theta_4 + \tilde{B} \ \ d\theta_1, \\ \theta_1 a = F \ \ a\theta_1 + P \ \ a\theta_4, & \theta_4 a = \tilde{F} \ \ a\theta_4 + \tilde{P} \ \ a\theta_1, \\ \theta_2 d = q \ \ d\theta_2 + X \ \ c\theta_1 + \tilde{X} \ \ c\theta_4, & \theta_3 d = q \ \ d\theta_3 + N \ \ c\theta_1 + \tilde{N} \ \ c\theta_4, \\ \theta_2 a = \frac{1}{q} \ \ a\theta_2 + N \ \ b\theta_1 + \tilde{N} \ \ b\theta_4, & \theta_3 a = \frac{1}{q} \ \ a\theta_3 + Z \ \ d\theta_1 + \tilde{Z} \ \ a\theta_1, \end{array} \qquad (4)$$

где $A - Nq = 1 + \tilde{P} - \frac{N}{q}$, $F - \frac{\tilde{N}}{q} = 1 + B - \tilde{N}q$ и $\delta D = D[(A - Nq)\theta_1 + (F - \frac{\tilde{N}}{q})\theta_4]$. Остальные соотношения получаются заменой $d \leftrightarrow c$, $a \leftrightarrow b$ с теми же коэффициентами.

Требование, чтобы θ_k коммутировали с перестановочными соотношениями (1) приводит к дополнительным уравнениям на коэффициенты, которые ввиду их громоздкости здесь не выписываются. В простейшем варианте, приводящем к алгебре вида Дринфельда - Джимбо, $X = \tilde{X} = N = \tilde{N} = Z = \tilde{Z} = 0$ и дополнительные уравнения удовлетворяются тождественно, кроме уравнений

$$\begin{array}{lll} P\tilde{P} - B\tilde{B} = 0, & AF + P\tilde{P} = 1, & FB + P\tilde{F} = 0, \\ AP + \tilde{A}B - FB - P\tilde{F} = 0, & \tilde{A}\tilde{F} + F\tilde{P} = 1, & \tilde{A}\tilde{P} + \tilde{B}A = 0, \\ \tilde{A}\tilde{P} + A\tilde{B} - \tilde{F}\tilde{B} - \tilde{P}F = 0. & & \end{array} \qquad (5)$$

Для дальнейшего анализа надо рассмотреть группу $SL_q(2, C)$. В этом случае $\theta_4 + \Delta\theta_1 = 0$, где $\Delta-$ параметр:

$$\begin{array}{lll} \theta_1 d = A d\theta_1, & \theta_2 d = q d\theta_2, & \theta_3 d = q d\theta_3, \\ \theta_1 a = F a\theta_1, & \theta_2 a = \frac{1}{q} a\theta_2, & \theta_3 a = \frac{1}{q} a\theta_3, \\ \delta D = (A\theta_1 + \theta_4) = 0, & A = \Delta, & AF = 1, \\ \delta D = (\theta_1 + F\theta_4) = 0, & F = \frac{1}{\Delta}. & \end{array} \qquad (6)$$

Дифференцируя перестановочные соотношения (6) и используя уравнение Маурера - Картана

$$\delta\Theta = -\Theta\Theta, \qquad (7)$$

получаем перестановочные соотношения между элементами θ-формы и условие $A = q^2$:

$$\begin{array}{lll} \theta_2\theta_3 + \frac{1}{q^2}\theta_3\theta_2 = 0, & \theta_1\theta_2 + q^4\theta_2\theta_1 = 0, & \\ \theta_1\theta_3 + \frac{1}{q^4}\theta_3\theta_1 = 0, & \theta_k D = D\theta_k, & \delta D = D(q^2\theta_1 + \theta_4) = D \ \ Tr_q\theta = 0. \end{array} \qquad (8)$$

Возвращаясь к $GL_q(2, C)$ группе, находим, что для того, чтобы перестановочные соотношения (4) были согласованы с (6), (8), должно выполняться условие

$$\tilde{A} = \frac{A}{q^2}.$$

Совместно с условиями (5) получаем однопараметрическое семейство перестановочных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\theta_1 d = A d\theta_1 + (\tilde{A}-1)d\theta_4, && \theta_4 d = (1 - A + \tfrac{A}{\tilde{A}})d\theta_4 + \tfrac{A(1-A)}{\tilde{A}}d\theta_1,\\
&\theta_1 a = (1-\tilde{A}+\tfrac{\tilde{A}}{A})a\theta_1 + \tilde{A}\cdot\tfrac{1-\tilde{A}}{A}\cdot a\theta_4, && \theta_4 a = \tilde{A}a\theta_4 + (A-1)a\theta_1,\\
&\theta_2 d = q d\theta_2, \qquad \theta_3 d = q d\theta_3, && A = \tilde{A}q^2\\
&\theta_2 a = \tfrac{1}{q}a\theta_2, \qquad \theta_3 a = \tfrac{1}{q}a\theta_3, &&
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Последующий анализ алгебры векторных полей показывает, что $\tilde{A}$ является несущественным параметром и для простоты можно выбрать $\tilde{A}=1$. При этом к перестановочным соотношениям (8) надо добавить соотношения, полученные дифференцированием соотношений (9) и использованием уравнений Маурера - Картана:

$$
\begin{aligned}
&\theta_2\theta_4 + \theta_4\theta_1 = 0, &&\\
&\theta_4\theta_3 + \theta_3\theta_4 = q^2(q^4-1)\theta_1\theta_3, && \mathrm{Tr}_q\theta = q^2\theta_1 + \theta_4.\\
&\theta_4\theta_2 + \theta_2\theta_4 = q^2(q^4-1)\theta_2\theta_1, &&
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Аналогичное рассмотрение для правых форм ω приводит к следующим перестановочным соотношениям для группы $SL_q(2,C)$:

$$
\begin{aligned}
&d\omega_1 = \tfrac{1}{q^2}\omega_1 d, \qquad d\omega_2 = \tfrac{1}{q}\omega_2 d, \qquad d\omega_3 = \tfrac{1}{q}\omega_3 d\\
&a\omega_1 = q^2\omega_1 a, \qquad a\omega_2 = q\omega_2 a, \qquad a\omega_3 = q\omega_3 a\ ,\\
&\omega_2\omega_3 + q^2\omega_3\omega_2 = 0\\
&\omega_1\omega_2 + \tfrac{1}{q^4}\omega_2\omega_1 = 0\ , \qquad \omega_k D = D\omega_k,\\
&\omega_1\omega_3 + q^4\omega_3\omega_1 = 0 \qquad \delta D = (\tfrac{1}{q^2}\omega_1 + \omega_4)D = 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

остальные соотношения получаются заменой $d \leftrightarrow c$, $a \leftrightarrow b$.

Однопараметрическое семейство перестановочных соотношений для группы $GL_q(2,C)$ есть

$$
\begin{aligned}
&d\omega_1 = A\omega_1 d + q^2(1-\tilde{A})\omega_4 d, && d\omega_4 = \tilde{A}\omega_4 d + \tfrac{1}{q^2}(1-A)\omega_1 d,\\
&a\omega_1 = q^2\tilde{A}\omega_1 a + q^4(\tilde{A}-1)\omega_4 a, && a\omega_4 = q^2 A\omega_4 a + (A-1)\omega_1 a,\\
&A + \tilde{A} = \tfrac{q^2+1}{q^2}. &&
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Снова выбор $\tilde{A}=1$ приводит к перестановочным соотношениям (11), дополненным условиями, что

$$
\begin{aligned}
&\omega_1\omega_4 + \omega_4\omega_1 = 0\\
&\omega_3\omega_4 + \omega_4\omega_3 = \tfrac{q^4-1}{q^2}\omega_3\omega_1\ , \qquad \omega_k D = D\omega_k,\quad Tr_q\omega = \tfrac{1}{q^2}\omega_1 + \omega_4\ .\\
&\omega_2\omega_4 + \omega_4\omega_2 = \tfrac{q^4-1}{q^2}\omega_1\omega_2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

По определению, действие дифференциала на произвольную функцию на группе есть

$$
\delta f = f\nabla_k^L\theta^k = \omega^k\nabla_k^R f, \tag{14}
$$

где ∇^L – левое и ∇^R – правое векторные поля на группе.

Из условия $\delta^2 f = 0$ и уравнений Маурера - Картана можно получить алгебру векторных полей для квантовой группы $SL_q(2,C)$:

$$\nabla_3^L\nabla_2^L - q^2\nabla_2^L\nabla_3^L = \nabla_1^L, \qquad \nabla_3^R\nabla_2^R - \tfrac{1}{q^2}\nabla_2^R\nabla_3^R = \nabla_1^R,$$

$$q^2\nabla_1^L\nabla_3^L - \tfrac{1}{q^2}\nabla_3^L\nabla_1^L = (q^2+1)\nabla_3^L, \qquad \nabla_1^R\nabla_3^R - q^4\nabla_3^R\nabla_1^R = (q^2+1)\nabla_3^R, \tag{15}$$

$$q^2\nabla_2^L\nabla_1^L - \tfrac{1}{q^2}\nabla_1^L\nabla_2^L = (q^2+1)\nabla_2^L, \qquad \nabla_2^R\nabla_1^R - q^4\nabla_1^R\nabla_2^R = (q^2+1)\nabla_2^R;$$

здесь через ∇_1^L обозначена комбинация $\nabla_1^L - q^2\nabla_4^L$, а через ∇_1^R - комбинация $\nabla_1^R - \frac{1}{q^2}\nabla_4^R$.

После отображения

$$\nabla_1^L = \tfrac{q^2}{q^2-1}(1-q^{-2H}), \qquad \nabla_2^L = q^{-\frac{H}{2}}T_2, \qquad \nabla_3^L = q^{-\frac{H}{2}}T_3,$$
$$\nabla_1^R = \tfrac{1-q^{2H}}{1-q^4}, \qquad \nabla_2^R = q^{\frac{H}{2}}T_2, \qquad \nabla_3^R = q^{\frac{H}{2}}T_3, \tag{16}$$

получим алгебру $U_qSL(2,C)$ в виде алгебры Дринфельда - Джимбо:

$$[T_3, T_2] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \qquad [H, T_3] = 2T_3, \qquad [H, T_2] = -2T_2.$$

Алгебра векторных полей для группы $GL_q(2,C)$ в дополнение к (15) имеет коммутационные соотношения

$$[\nabla_1^L, \nabla_4^L] = 0, \qquad [\nabla_1^R, \nabla_4^R] = 0,$$
$$[\nabla_4^L, \nabla_2^L] = \nabla_2^L, \qquad [\nabla_4^R, \nabla_2^R] = \nabla_2^R,$$
$$[\nabla_3^L, \nabla_4^L] = \nabla_3^L, \qquad [\nabla_3^R, \nabla_4^R] = \nabla_3^R.$$

В заключение отметим, что перестановочные соотношения между параметрами группы и дифференциалами, полученные из уравнений (9),(12), различны, что отличает построенную дифференциальную геометрию от бикоинвариантной. Можно построить согласованную бикоинвариантную дифференциальную геометрию для квантовой группы $SL_q(2,C)$, не накладывая условия $N = X = Z = 0$. Но при этом алгебра векторных полей не может быть приведена к алгебре вида Дринфельда - Джимбо.

Авторы выражают благодарность Д.В.Волкову за обсуждение и интерес к работе.

Работа частично поддержана Фондом Фундаментальных Исследований Государственного Комитета по Науке и Технике Украины, грант 2/100.

1. S.L.Woronowicz, Comm. Math. Phys. **122**, 8125 (1989).
2. J.Wess and B.Zumino, Preprint CERN-TH-5697190 (1990).
3. A.Schirrmacher, J.Wess, and B.Zumino, Z. Phys. C, **49**, p. 317.
4. Ю.Манин, ТМФ **3**, 425 (1992).
5. F.Müller-Hoissen, J. Phys. **A25**, 1703 (1992).
6. P.Aschieri and L.Catellani, Preprint CERN-TH-6565/92 (1992).
7. B.Jurčo, Lett. Math. Phys. **22**, 177 (1991).
8. P.Schupp, P.Watts, and B.Zumino, Preprint UCB-PTH-92/13 (1992)
9. В.П.Акулов, В.Д.Гершун, А.И.Гуменчук, Письма в ЖЭТФ **56**, 180 (1992).
10. M.Jimbo, J. Mod. Phys. **A4**, 3759 (1989).
11. V.G.Drinfeld, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, 1986, p. 798.