РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

П И С Ь М А
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 58, ВЫПУСК 10*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *25 НОЯБРЯ, 1993*

Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.10, стр.785 - 789

О КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А.В.Котиков

Объединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 21 июня 1993 г.
После переработки 20 сентября 1993 г.

Трехмерная КЭД с N 4-компонентными фермионами изучена, следуя Т.Аппелкуисту и др., в ведущем и следующем за ним порядках $1/N$ разложения. Показано, что с ростом величины калибровочного параметра интервал значений N, при которых генерируется динамическая масса, сильно уменьшается. Так, в калибровке Ландау динамическое нарушение киральной симметрии существует при $N < 3,31$, а в калибровке Фейнмана динамическая масса вообще не генерируется.

Модель, которую мы здесь будем рассматривать – трехмерная КЭД с N 4-компонентными фермионами. В безмассовом случае, чем мы и ограничимся, в модели существуют только инфракрасные расходимости, которые исчезают при работе с $1/N$ разложением (см. [1,2]). Как следствие, единственной шкалой является размерная константа взаимодействия $a = Ne^2/8$, которую будем сохранять фиксированной при $N \to \infty$.

Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A})\Psi - \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где Ψ – 4-компонентный комплексный фермион. В 4-компонентном случае мы можем ввести матрицы γ_3 и γ_5, которые антикоммутируют с γ_0, γ_1 и γ_2. Лагранжиан (1) инвариантен при трансформациях $\Psi \to \exp(i\alpha_3\gamma_3)\Psi$ и $\Psi \to \exp(i\alpha_5\gamma_5)\Psi$. Вместе с единичной матрицей и $[\gamma_3, \gamma_5]$ мы имеем $U(2)$-симметрию для каждого спинора, и, следовательно, полная глобальная "киральная" симметрия есть $U(2N)$. Введение массового члена в лагранжиан (1) нарушает эту симметрию до $U(N)*U(N)$. Динамическая генерация такой массы и будет изучена в настоящей работе. Заметим, что существует возможность включить в рассмотрение и несохраняющую четность массу (см., например, [3]), однако здесь такой эффект рассматриваться не будет.

Следуя работе [4], мы изучаем решение уравнения Швингера–Дайсона (УШД). Обратный фермионный пропагатор представим в стандартной форме:

$$S(p) = (1 + A(p))[-\hat{p} + \Sigma(p)],$$

где $A(p)$ есть коэффициент перенормировки волновой функции, а $\Sigma(p)$ – динамическая, сохраняющая четность масса, взятая одинаковой для всех фермионов.

УШД имеет вид

$$\Sigma(p) = \frac{2a}{N}\mathrm{Tr}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu D_{\mu\nu}(p-k)\{\hat{k}+\Sigma(k)\}\Gamma^\nu(p,k)}{(1+A(k))[k^2+\Sigma^2(k)]}, \tag{2}$$

где [1])

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi)p_\mu p_\nu/p^2}{p^2[1+\Pi(p)]}$$

есть фотонный пропагатор, а $\Gamma^\nu(p,k)$ – вершинная функция.

1. В ведущем по $1/N$ порядке имеем

$$A(p) = 0, \qquad \Pi(p) = a/|p| \quad \text{и} \quad \Gamma^\nu(p,k) = \gamma^\nu,$$

где вкладом фермионной массы в поляризационный оператор мы пренебрегли. УШД принимает следующий вид:

$$\Sigma(p) = \frac{16a}{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\Sigma(k)}{k^2[(p-k)^2 + a|p-k|]}, \tag{2a}$$

где, как и в работе [4], мы пренебрегли членом $\Sigma^2(k)$ в знаменателе.

Следуя [4], мы используем следующий анзатц для динамической массы:

$$\Sigma(k) \sim (k^2)^\alpha. \tag{3}$$

Как хорошо видно из уравнения (2a), в пределе бесконечно большой константы связи a правая часть уравнения (2a) при наложении условия (3) может быть легко найдена с помощью стандартных правил расчета безмассовых диаграмм теории возмущений (см., например, [7]). При $a \to \infty$ мы имеем, решая (2a),

$$1 = \frac{(2+\xi)}{L\beta} \tag{3a}$$

с $\beta = (-\alpha)(\alpha + \frac{1}{2})$ и $L = \pi^2 N$, или

$$\alpha_\pm = \frac{1}{4}\left[-1 \pm \left(1 - \frac{16(2+\xi)}{L}\right)^{1/2}\right]. \tag{3b}$$

---

[1])Следуя работе [5], мы вводим нелокальный, фиксирующий калибровку, член. Подробный анализ такой возможности дан в работе [6].

Таким образом, мы воспроизводим решение, данное Аппелкуистом и др. в работе [4]. Их анализ приводит к критическому значению $N_c = 16(2+\xi)/\pi^2 \approx$ $\approx 1,62(2+\xi)$ для числа фермионов, такому, что для $N > N_c$ $\Sigma(p) = 0$ и

$$\Sigma(0) \simeq \exp\left[-\frac{2\pi}{(N_c/N-1)^{1/2}}\right]$$

для $N < N_c$. Нарушение киральной симметрии появляется, когда индекс α становится комплексным.

2. Следующий за ведущим порядок в разложении по $1/N$ был уже рассмотрен ранее в работе [5]. Отметим, однако, что результат в [5] был получен в виде анзатца

$$\beta = \frac{d(\xi)}{L}\left(1 - \frac{b(\xi)}{L}\right) \qquad (4)$$

для поведения $\beta(L)$. Более того, полный результат был найден только в фейнмановской калибровке: $d(1) = \frac{8}{3} \approx 2,67$, $b(1) \approx 7,81$.

Мы вычислили точно фейнмановские интегралы, соответствующие $1/N$ коррекции (см. рис.1 работы [5]), используя правила для расчета безмассовых диаграмм стандартной теории возмущений. Результат содержит члены в виде двойного и тройного рядов, то есть имеет достаточно громоздкий вид и будет представлен в отдельной публикации. Здесь мы ограничимся рассмотрением только упрощенной зависимости, соответствующей выделению из сложных рядов членов $\sim 1/(-\alpha)^k$ и $\sim 1/(\alpha+1/2)^k$, наиболее важных при изучении окрестности критической точки $\alpha_c = -\frac{1}{4}$, $N = N_c$. Мы имеем следующее уравнение

$$1 = \frac{(2+\xi)}{L\beta} + \frac{1}{(L\beta)^2}[f(\xi) + \varphi(\xi)\beta], \qquad (5)$$

где

$$f(\xi) = \frac{4}{3}(1-\xi) - \xi^2, \quad \varphi(\xi) = \frac{176}{9} - 4\pi^2 - \frac{16}{3}\xi + 4\xi^2.$$

При использовании анзатца (4) как решения уравнения (5) получаем довольно слабую калибровочную зависимость параметров d и b, а также N_c, найденного из (4) при $\beta_c = \frac{1}{16}$:

$$d(\xi) = \{2,53; 2,62; 2,67; 2,62\}, \quad b(\xi) = \{6,52; 7,19; 8,24; 9,51\},$$

$$N(\xi) = \{3,27; 3,32; 3,19; 2,77\} \text{ для } \xi = \{0,0; 0,3; 0,7; 1,0\},$$

соответственно. Отметим, что при $\xi = 2/3$ и $\xi = -2$ решение уравнения (5) в виде (4) является точным.

Найдем точное критическое значение N_c из уравнения (5). Полагая $\alpha_c = -\frac{1}{4}$, получаем, что

$$N_{c,\pm} = \frac{8}{\pi^2}[(2+\xi) \pm \{(2+\xi)^2 + 4f(\xi) + \varphi(\xi)/4\}^{1/2}] \qquad (6)$$

имеет следующие значения:

$$N_{c,+} = \{3,31; 3,35; 3,09; 2,81\}; \qquad N_{c,-} = \{-0,07; 0,38; 1,29; 1,88\}$$

для

$$\xi = \{0,0; 0,3; 0,7; 0,9\}.$$

Отметим новый любопытный факт, следующий из уравнения (6): учет $1/N$ коррекции приводит к появлению второй критической точки (для $0,05 < \xi < 0,95$), ниже которой киральная симметрия не нарушается. Генерация динамической массы происходит только в интервале между этими критическими точками. При $\xi \gtrsim 0,95$ этот интервал схлопывается и киральная симметрия остается ненарушенной. Для малых значений параметра калибровки ($\xi \lesssim 0,05$) новая критическая точка не возникает.

Отметим, что учет коэффициентов точного решения УШД в первых двух порядках $1/N$ разложения может немного изменить численные значения для критических точек $N_{c,+}$ и $N_{c,-}$, однако качественная картина уменьшения интервала значений N, где происходит генерация динамической массы, не изменится.

Решение уравнения (5)

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2L}\left[2+\xi+\frac{\varphi(\xi)}{L} \pm \left\{\left(2+\xi+\frac{\varphi(\xi)}{L}\right)^2 + 4f(\xi)\right\}^{1/2}\right] \tag{7}$$

имеет простое выражение в калибровке Ландау для "+" компоненты при $L \sim L_c$:

$$\beta_{+}(\xi=0) \approx \left(1+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\frac{1}{L} + \left(1+\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\frac{\varphi(0)}{2L^2} \approx \frac{2,52}{L}\left(1-\frac{6,52}{L}\right)$$

с коэффициентами, близкими к найденным в работе [5].

3. Нарушение киральной симметрии в трехмерной КЭД интенсивно изучается в последнее время в связи с тем фактом, что КЭД является простой, но важной моделью в изучении критического поведения таких сложных теорий, как КХД. Различными группами (см. [4, 8–11]), однако, были получены самые противоречивые результаты. Рассматривая ведущий порядок $1/N$ разложения УШД, Аппелкуист и др. [4] (см. также раздел 1) показали, что масса фермионов генерируется для $N < N_c \approx 3,24$. С другой стороны, Пеннингтон и др. [8], а также Писарски [9], используя различные методы решения УШД, нашли, что динамическая масса возникает для всех N, зануляясь только в пределе $N \to \infty$. Существует также непертурбативное решение УШД, найденное Аткинсоном и др. [10], которое сохраняет киральную симметрию при достаточно больших N. Монте-Карло-вычисления [11] поддерживают наличие критического значения N_c.

Поскольку N_c невелико, то вклад неведущих порядков может оказаться весьма существенным. В работе [5] Наш, включив в анализ $O(1/N^2)$ члены, изучил решение УШД в виде анзатца (4) и показал сильное ослабление калибровочной зависимости, имевшее место в результате ведущего порядка. Отметим, что это свойство связано с видом анзатца (4), где неведущее приближение фактически берется как $1/N$ поправка к результату ведущего порядка, и аналогично отсутствию динамической массы (то есть и калибровочно-инвариантных членов) при использовании простой теории возмущений по $1/N$ без УШД (см. [1]).

В настоящей работе мы включили $1/N$ поправку точно и нашли сильную калибровочную зависимость не только количественной, но и качественной характеристик результата, вообще говоря, не представимого в виде анзатца

(4). Следовательно, надежда на улучшение ситуации в изучении критического поведения трехмерной КЭД при включении членов $O(1/N^2)$ не оправдалась. Отметим, однако, что в калибровке Ландау, где тождества Уорда близки к своему выполнению даже при использовании свободной вершины в УШД, дополнение $1/N$ коррекции не изменяет качественных и чрезвычайно слабо изменяет количественные предсказания ведущего порядка. Таким образом, в этом случае решение, данное Аппелкуистом и др., кажется, получает основательную поддержку.

В заключение отметим, следуя Писарски [9], что пока трудно говорить о хорошем понимании нарушения киральной симметрии в такой сложной теории как КХД в четырех измерениях, если мы не можем еще до конца понять этот процесс в простой модели трехмерной КЭД.

Автор благодарен Д.Аткинсону и В.П.Гусынину за интерес к работе и полезные замечания.

---

1. T.Appelquist and R.Pisarski, Phys. Rev. **D23**, 2305 (1981).
2. R.Jackiw and S.Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981); T.Appelquist and U.Heinz, Phys. Rev. **D24**, 2169 (1981).
3. T.Appelquist, M.Bowick, D.Karabali, and L.C.R.Wijewardhana, Phys. Rev. **D33**, 3774 (1986).
4. T.Appelquist, D.Nach, and L.C.R.Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **60**, 2575 (1988).
5. D.Nash, Phys. Rev. Lett. **62**, 3024 (1989).
6. D.V.Shirkov, Nucl. Phys. **B332**, 425 (1990).
7. D.I.Kazakov, Phys. Lett. **B133**, 406 (1983).
8. M.R.Pennington and D.Walsh, Phys. Lett. **B253**, 246 (1981); D.C.Curtis and M.R.Pennington, Phys. Rev. **D42**, 4165 (1990).
9. R.D.Pisarski, Phys. Rev. **D29**, 2423 (1984); **D44**, 1866 (1991).
10. D.Atkinson, P.W.Johnson, and P.Maris, Phys. Rev. **D42**, 602 (1990).
11. E.Dagotto, A.Kocic, and J.Kogut, Phys. Rev. Lett. **62**, 1063 (1989).