Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.11, стр.906 - 910

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА ВОЗНИКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ ТОЧКИ ОПРОКИДЫВАНИЯ В ЗАДАЧАХ С МАЛОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Б.И.Сулейманов

Институт математики Уфимского научного центра РАН

450000 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 3 сентября 1993 г.

После переработки 20 октября 1993 г.

Рассматривается специальное решение уравнения КдВ, описывающее [1,2] начало "опрокидывания" в задачах с малой дисперсией. Выдвинуто предположение о том, что данное решение одновременно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, являющемуся стационарной частью симметрии [9] уравнения КдВ. Приведены аргументы в пользу этого предположения.

1. Гуревич и Питаевский указали [1, 2], что вблизи точки, соответствующей началу опрокидывания "фронта волны", в задачах с малой дисперсией нужно использовать специальное решение уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ):

$$v_t + v_{xxx} + vv_x = 0. \tag{1}$$

Вне области быстрых колебаний [1, 2] его асимптотика определяется условием сшивки:

$$v(t,x) \approx |t|^{1/2} f(s) \qquad (|t| \gg 1), \tag{2}$$

где $s = x/|t|^{3/2}$, а $f(s)$ есть единственный корень уравнения

$$s - (\mathrm{sgn}\, t) f + f^3 = 0. \tag{3}$$

Интерес к свойствам решения (1) не ослабевает до сих пор [3–8]. В настоящей заметке выдвигается предположение (и приводятся аргументы в его пользу) о том, что оно одновременно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$v_7 + 7[vv_5 + 3v_1v_4 + 5v_2v_3]/3 + 35[v_3v^2 + v_1^3 + 4v_2v_1v]/18 + 35v_1v^3/54 +$$
$$+ 5[xv_1 - 3t(v_3 + vv_1) + 2v]/54 = 0, \tag{4}$$

являющемуся стационарной частью симметрии уравнения КдВ [9] (нижний индекс означает порядок производной v по x). Из (1) и (4) следует, что v также должно быть решением ОДУ по переменной t.

2. Предположение о том, что решение (1) Гуревича–Питаевского (ГП) одновременно является точным решением (4), в частности, основывается на виде его полного (с точностью до любой степени $|t|^{-1}$) асимптотического разложения вне зоны колебаний. Но до сих пор вопрос о виде полного разложения не считался актуальным. И сначала придется заняться им.

В статье [2] особо отмечалось, что рассматриваемое решение КдВ имеет общее значение – оно "всегда" возникает вблизи точки опрокидывания, если только не важны диссипативные эффекты. В свою очередь, и для изучения

свойств самого решения ГП можно использовать любую из исходных задач с малой дисперсией. С этой целью ранее часто применялась начальная задача непосредственно для уравнения КдВ. При всей своей корректности такой подход все же несколько "затемняет" универсальную сторону характера решения ГП. Чтобы избежать этого, при уточнении асимптотики (2) мы будем исходить из более общей постановки.

3. Ильиным в [10] был проведен исчерпывающий анализ процесса опрокидывания простой волны для уравнения с малой диссипацией $U_\tau + (\varphi(U))'_z = \epsilon^2 U_{zz}$. Заменим вторую производную на третью:

$$U_\tau + (\varphi(U))'_z + \epsilon^2 U_{zzz} = 0, \tag{5}$$

и зададим для U монотонный начальный профиль

$$U|_{\tau=-1} = \omega(z). \tag{6}$$

Вопрос об асимптотике при $\epsilon \to 0$ решения начальной задачи (5), (6) вблизи точки опрокидывания будет исследоваться при весьма общей нелинейности φ – практически той же, что в [10]. Именно, предполагаются выполненными следующие условия, гарантирующие опрокидывание в точке $z = 0$, $\tau = 0$ $(g(\alpha) = \varphi'(\omega(\alpha)))$:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \omega(0) = 0, \qquad g(0) = g''(0) = 0, \qquad g'(0) = -1, \qquad g'''(0) = 6, \qquad \varphi''(0) = 1. \tag{7}$$

(Можно иметь в виду традиционный частный случай уравнения КдВ $\varphi = U^2/2$ и, например, начальный профиль $\omega = -3^{-1/2}\mathrm{arctg}(3^{1/2}z)$, но при этом особого упрощения не достигается).

4. Решение (5), (6) до "опрокидывания волны" ищется в виде ряда

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \ldots + \epsilon^k U_k + \ldots, \tag{8}$$

являющегося так называемым внешним разложением [10]. $U_0(\tau, z)$ есть решение предельной $(\epsilon = 0)$ для (5), (6) задачи. На характеристиках

$$z = \alpha + g(\alpha)(1 + \tau) \tag{9}$$

предельного уравнения эта функция постоянна (пока $z'_\alpha > 0$) :

$$U_0(\tau, z) = \omega(\alpha). \tag{10}$$

Для остальных $U_k(\tau, z)$ выписывается рекуррентная последовательность линейных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Применяя такие же рассуждения по индукции, что были использованы в [10], нетрудно показать, что при $z \to 0$ и $\tau \to 0$ $(k \geq 1)$

$$U_k(\tau, z) = \Sigma[h(\tau, \alpha)]^{-i}\alpha^j \Phi_{ij}(\alpha). \tag{11}$$

Здесь $h(\tau, \alpha) = z'_\alpha = 1 + g(\alpha)(\tau + 1)$, $\Phi_{ij}(\alpha)$ - гладкие функции, z, τ и α связаны соотношением (9), а конечная сумма берется по целым $i, j \geq 0$, для которых $4 \leq 2i \leq 7k - j - 1$. Таким образом, особенности функций U_k в точке опрокидывания нарастают вместе с ростом k. И внешнее разложение (8) становится тут непригодным.

Для получения правильного приближения к $U(\epsilon, \tau, z)$ в окрестности начала введем растянутые переменные $\tau = \epsilon^{4/7}t$, $z = \epsilon^{6/7}x$ и будем искать внутреннее асимптотическое разложение в виде ряда:

$$U(\epsilon, \tau, z) \equiv W(\epsilon, t, x) = \epsilon^{2/7}(W_0 + \epsilon^{2/7}W_1 + \ldots + \epsilon^{2n/7}W_n + \ldots). \qquad (12)$$

Замена переменных определяется, как и в [10], соображениями размерности, примененными к уравнению (5) и соотношению (9). А вид (12) внутреннего разложения диктуется условием его согласования с (8). Уравнения для W_k получаются обычным способом после подстановки (12) в исходное уравнение (5). Получаем, что $W_0(t, x)$ есть решение КдВ (1). Согласно сказанному выше, оно и представляет собой основной объект изучения настоящей работы – специальное решение ГП.

Если в ряде (8) заменить функции $U_k(\tau, z)$ их асимптотиками в нуле, используя представления (11), соотношение (9) и замену независимых переменных, то получится ряд вида (12), где вместо функций $W_n(t, x)$ стоят их асимптотические ряды. В частности, при $n = 0$ данная процедура дает ответ на вопрос, ради которого, собственно, в этой статье и рассматривалась задача (5), (6). Полное асимптотическое разложение решения ГП уравнения КдВ вне области колебаний есть ряд

$$v = W_0 = |t|^{1/2}[f(s) + \sum_{j=1}^{\infty} |t|^{-7j/2} g_j(s)] \qquad (|t| \gg 1), \qquad (13)$$

где f есть единственное решение кубического уравнения (3), а $g_i(s)$ – конкретные гладкие функции.

5. Непосредственно легко убедиться в том, что некоторое совместное асимптотическое решение $\Gamma(t, x)$ уравнения КдВ (1) и ОДУ (4) имеет при $|t| \gg 1$ аналогичный (13) вид:

$$\Gamma(t, x) = |t|^{1/2}[f(s) + \sum_{j=1}^{\infty} |t|^{-7j/2} p_j(s)], \qquad (14)$$

коэффициенты $p_j(s)$ которого есть однозначно определяемые из рекуррентных алгебраических соотношений функции. Эти функции являются гладкими в области однозначности корня $f(s)$ уравнения (3).

Таким образом, при $t \to -\infty$ оба разложения (13) и (14) имеют гладкие коэффициенты при всех s. Следующее рассуждение (также аналогичное использованному в похожей ситуации в [10]) показывает, что p_j и g_j совпадают для всех j. В самом деле, при подстановке (13) в (1) возникает последовательность линейных ОДУ первого порядка на коэффициенты g_j. Условие гладкости при $s = 0$ определяет эти функции однозначно, поскольку соответствующие однородные уравнения имеют решения $f(s)^{3-7j}/f'(s)$ с сильными особенностями в нуле. А значит, (13) и (14) необходимо совпадают. И естественно предположить, что решение ГП действительно удовлетворяет (4).

6. В [2] была выдвинута гипотеза о том, что асимптотика $v(t, x)$ в области осцилляций описывается автомодельными решениями уравнений Уизема, получающихся при усреднении [11] кноидальной волны. По предложенной в [3] схеме эти решения были найдены в [4]. Из результатов [3,4] вытекает, что

"усредненное" следствие (4) как раз и определяет эти автомодельные решения уравнений Уизема. (Особенно просто в этом убедиться, воспользовавшись результатами вычислений [7].)

7. Ранее [12, 13] автором настоящего сообщения факт одновременного удовлетворения ОДУ по x и t был обнаружен для специального решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ):

$$-iq_t = g_{xx} + 2\delta|q|^2 q, \tag{15}$$

описывающего в ряде задач [14, 15] процесс "опрокидывания фазы" быстроколеблющихся решений уравнений с малой нелинейностью. Эта функция является аналогом интеграла Пирси:

$$Q = \int\limits_R \exp\{-i(x\lambda + t\lambda^2 - \lambda^4/4)\}d\lambda, \tag{16}$$

удовлетворяющего линейной части НУШ. Интеграл Q также есть решение линейной части упомянутых ОДУ по x и t, которым одновременно с (15) удовлетворяет его нелинейный аналог $q(t,x)$ из [12–15].

В предположении об одновременной справедливости для решения ГП уравнений (1) и (4) его можно считать аналогом другого интеграла:

$$I = \int\limits_R \lambda \exp\{-2i(x\lambda + 4t\lambda^3 - 3456\lambda^7/35)\}d\lambda, \tag{17}$$

удовлетворяющего, как нетрудно видеть, линейной части (1) и (4). (В диссипативном случае, исследованном в [10], вблизи точки опрокидывания также используется нелинейный аналог функции Пирси – специальное решение уравнения Бюргерса $R_t + RR_x = R_{xx}$.) И интеграл Пирси, и интеграл (17) относятся к числу так называемых специальных функций волновых катастроф, играющих важную роль в исследовании асимптотик решений линейных задач [16]. Как видим, вблизи точки опрокидывания в нелинейных задачах возникают их аналоги – специальные решения нелинейных эволюционных уравнений. Как и в линейном случае, они одновременно есть решения ОДУ.

8. На самом деле аналогии решения НУШ из [12–15] с интегралом Пирси и рассматриваемого решения КдВ с интегралом (17) простираются дальше. Оказывается, оба этих специальных решения относятся к классу изомонодромных [17]. Среди других решений уравнений КдВ и НУШ изомонодромные выделяются тем, что соответствующие Ψ-функции, наряду с обычными уравнениями метода обратной задачи [6], удовлетворяют линейным ОДУ по спектральному параметру λ с рациональными (относительно λ) коэффициентами. Конкретный вид этих ОДУ определяется поведением Ψ-функций в окрестностях их особых точек на комплексной плоскости λ. В [12, 13] отмечено, что при $|\lambda| \to \infty$ квадраты Ψ-функций, соответствующих рассматриваемому там решению НУШ, "совпадают" с экспонентой в интеграле Пирси (16).

Это же "совпадение" в главном є подынтегральной экспонентой в интеграле (17) имеет место и для квадратов Ψ-функций, соответствующих решению (1), (4). Правда, уравнения по λ оказываются для них громоздкими. Все же укажем, что обычное ОДУ $\Psi_{xx} + (\lambda^2 + v/6)\Psi = 0$ на потенциале v, удовлетворяющем

(4), совместно с уравнением

$$\lambda\Psi_\lambda = 3456\{\Psi_7 + 7v\Psi_5/12 + 35v_1\Psi_4/24 + [35(v_2/16 + v^2/288)]\Psi_3 +$$

$$+35[5v_3 + vv_1]\Psi_2/128 + [161v_4 + 35(10vv_2 + 7(v_1)^2 + v^3/3)]\Psi_1/192 +$$

$$+[63v_5 + 35(vv_3 + 2v_1v_2 + v^2v_1/6)]\Psi/384\}/5 - 12t\Psi_3 + (x - 18tv)\Psi_1 - 9tv_1\Psi.$$

9. В [18] были введены в рассмотрение иерархии обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых трактуются как нелинейные аналоги специальных функций волновых катастроф. Если считать изомонодромность решения ГП уравнения КдВ и решения НУШ из [12–15] установленной, то их с точки зрения Китаева [18] можно рассматривать как решения представителей двух разных иерархий ОДУ, отвечающих случаю одной из самых элементарных волновых катастроф – катастрофы сборки.

Еще более простой случай – катастрофа складки. Среди соответствующих ей изомонодромных спецфункций содержатся решения нелинейных ОДУ Пенлеве. Изомонодромность позволяет эффективно исследовать асимптотики решений этих классических уравнений [19, 20].

Если изомонодромность имеет место для решения ГП, то она также может быть использована при уточнении асимптотики в области колебаний.

Автор в заключение отмечает, что использованный им симметрийный подход к нелинейным спецфункциям (имеющий истоком одно наблюдение из [18]) был разработан в его совместной с И.Т.Хабибуллиным работе, готовящейся в настоящий момент к публикации.

---

1. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **60**, 2155 (1971).
2. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).
3. И.М.Кричивер, Функц. анализ и его прил. **22**, 37 (1988).
4. Г.В.Потемин, УМН **43**, 211 (1988).
5. В.Р.Кудашев, Письма в ЖЭТФ **56**, 322 (1992).
6. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
7. В.Р.Кудашев, С.Е.Шарапов, ТМФ **87**, 40 (1991).
8. С.П.Новиков, Б.А.Дубровин, УМН **44**, 29 (1989).
9. Н.Х.Ибрагимов, А.Б.Шабат, Доклады АН СССР **244**, 57 (1979).
10. А.М.Ильин, Известия АН СССР, сер. мат. **53**, 258 (1989).
11. G.B.Whitem, Proc. Roy. Soc. **A283**, 283 (1965).
12. Б.И.Сулейманов, Зап. ЛОМИ **187**, 110 (1991).
13. Б.И.Сулейманов, Доклады АН СССР **326**, 40 (1992).
14. D.H.Peregrin and R.Smith, Trans. Roy. Soc. London **A292**, 341 (1979).
15. R.Haberman and R.Sun, Stud. Appl. Math. **62**, 1 (1985).
16. В.П.Маслов, М.В.Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
17. А.Р.Итс, Известия АН СССР, сер. мат. **49**, 330 (1985).
18. А.В.Китаев, Зап. ЛОМИ **187**, 53 (1991).
19. M.Jimbo. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18**, 1137 (1982).
20. В.Ю.Новокшенов, Функц. анализ и его прил. **18**, 90 (1984).