Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.11, стр.916 - 924 ©1993 г. 10 декабря

СИНГУЛЯРНЫЕ ВЕКТОРЫ МФФ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

А.М.Семихатов

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН

117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 ноября 1993 г.

Установлено совпадение сингулярных векторов по отношению к алгебре (скрученной) $N=2$-суперсимметрии и алгебре Каца–Муди $sl(2)$. На основе рассмотрения простейшей модели Казамы–Сузуки получено представление для $sl(2)$-токов в терминах взаимодействующей с материей гравитации, и из формул Маликова–Фейгина–Фукса (МФФ) для $sl(2)$-сингулярных векторов получено общее выражение для сингулярных векторов в топологических теориях.

С сингулярными векторами в представлениях бесконечномерных алгебр симметрий конформных теорий ассоциированы неприводимые модели, корреляторы в которых подчинены decoupling-уравнениям – условиям отщепления соответствующего сингулярного вектора. Многое известно о сингулярных векторах в представлении алгебры Вирасоро (*минимальные* модели) [1]–[8] и алгебры токов $sl(2)$ [9, 10], а также о редукции первых ко вторым [6, 8].

В данной работе рассматриваются сингулярные векторы по отношению к алгебре $N=2$-суперсимметрии в ее *топологическом* ('скрученном') варианте [11, 12]. Топологические алгебры интересны, в частности, потому, что всякая такая алгебра с топологическим центральным зарядом $\mathrm{c} \neq 3$ допускает построение [13]–[17] в терминах обычной (несуперсимметричной) материи с центральным зарядом $d=(\mathrm{c}+1)(\mathrm{c}+6)/(\mathrm{c}-3)$ дополнительного скалярного поля и пары bc-духов. Возможны две такие конструкции [13, 14], одна из которых воспроизводит в секторе (материя) + (скаляр ϕ) рецепт Давида, Дистлера и Каваи (DDK) [18], в силу чего поле ϕ мы будем называть лиувиллевским. Имеется и второй способ построить топологическую алгебру из материи с центральным зарядом d, поля Лиувилля и духов, *имеющих спин 1* (а не 2, как в варианте, содержащем DDK). Эту версию конструкции мы назовем 'зеркальной' [14] гравитацией, взаимодействующей с материей. Именно она интересна в приложении к топологическим сингулярным векторам.

Пусть $|\Psi\rangle \equiv |\mathsf{h}\rangle$ – киральное примарное сосотяние [19] топологической алгебры с топологическим $U(1)$ зарядом h. Построив сингулярный вектор $|\Upsilon\rangle$ над $|\mathsf{h}\rangle$ на уровне l, подставим в него выражения для топологических генераторов через 'составляющие' материю, поле Лиувилля и духи. Потребуем теперь отщепления сингулярного вектора, т.е. зануления всех корреляторов вида $\left\langle \Upsilon(z_a)\prod_{b\neq a}\Psi_b(z_b)\right\rangle$, где Ψ_b – киральные примарные поля. Поле Ψ будет киральным примарным, когда $|\Psi\rangle = |\text{материя}\rangle \otimes |\text{Лиувилль}\rangle \otimes |0\rangle_{bc}$, где $|0\rangle_{bc}$ – духовый вакуум, а $|\text{материя}\rangle \otimes |\text{Лиувилль}\rangle$ – примарное состояние материи, определенным образом одетое лиувиллевским скаляром. Тем самым хорошо определена редукция к теории материя + Лиувилль. Образ топологических сингулярных векторов при этой редукции совпадает с результатом непосредственного построения сингулярных векторов в теории материя + Лиувилль, подчиненных условиям одевания Концевича–Мивы [20, 14]. Условия их отщепления записываются как дифференциальные уравнения в частных производных порядка l на корреляционные функции. Оказывается [20, 14], что дифференциальные операторы, задающие эти уравнения, факторизуются (полностью или с точностью до некоторого препятствия) через генераторы Вирасоро $\mathsf{L}_{\geq -1}$, записанные в терминах времен t_r, вводимых преобразованием Мивы $t_r = \frac{1}{r}\sum_b n_b z_b^{-r}$, $r \geq 1$, где n_b – лиувиллевские заряды полей Ψ_b. Полная факторизация имеет место для сингулярных векторов типа $(l,1)$ или $(1,l)$, описываемых ниже.

Два целых числа $l' \equiv 2j_1 + 1$ и $l'' \equiv 2j_2 + 1$ характеризуют *топологический* сингулярный вектор $|\Upsilon\rangle$ следующим образом: $|\Upsilon\rangle$ строится на уровне $l = l'l''$ над примарным киральным полем $|\mathsf{h}\rangle$, топологический $U(1)$ заряд h которого связан с тополгческим центральным зарядом c равенством

$$\mathsf{h} = \frac{\mathsf{c}-3}{3} j_1 + 2j_2 \tag{1}$$

с целыми или полуцелыми j_1 и j_2. Для векторов типа (l', l''), где оба числа не равны 1, имеется препятствие к полной факторизации [14].

Ситуация напоминает известное 'хорошее' поведение сингулярных векторов типа $(2j_1 + 1, 1)$ в алгебре Каца–Муди $sl(2)$ (ср. [5, 6, 8]). Непосредственное сравнение с этой алгеброй оказывается действительно возможным, если использовать (скрученную) модель Казамы–Сузуки [21] $\widetilde{sl}(2)_k \oplus u(1)/u(1)$, где $\widetilde{sl}(2)_k$ обозначает $sl(2)$ алгебру уровня k с тензором энергии-импульса

$$\widetilde{T^{\mathsf{S}}} = \frac{1}{k+2}\left(J^0 J^0 - \tfrac{1}{2}(J^+ J^- + J^- J^+)\right) + \partial J^0 . \tag{2}$$

Алгебра $u(1)$ в числителе модели Казамы–Сузуки фермионизуется в пару духов спина 1, обозначаемых ниже BC (ср. [16]), после чего топологическая алгебра строится известным образом [11, 22, 23, 24]. Нечетные генераторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$ имеют вид

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{2}{k+2}}\, BJ^+ , \qquad \mathcal{G} = -\sqrt{\frac{2}{k+2}}\, CJ^- , \tag{3}$$

а топологический $U(1)$ ток и тензор энергии–импульса реализуются в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{k}{k+2} BC - \frac{2}{k+2} J^0 , \qquad \mathcal{T} = -\frac{1}{(k+2)}(J^+J^-) + \frac{k}{k+2}\partial B{\cdot}C + \frac{2}{k+2} BCJ^0 . \tag{4}$$

Топологический центральный заряд оказывается равным $\mathsf{c} = \frac{3k}{k+2}$. Таким образом, имеем отображение $\mathfrak{t} \to \mathcal{U}(sl(2)_k \oplus u(1))$, где $\mathfrak{t}$ – топологическая алгебра, а $\mathcal{U}$ обозначает универсальную обертывающую. Представление топологической алгебры $\mathfrak{t}$ в виде материи $\mathfrak{m}$, одетой 'зеркальной' гравитацией, позволяет полагать $\mathfrak{t} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l} \oplus [bc]$, где $\mathfrak{l}$ и $[bc]$ – теории Лиувилля и духов соответственно.

Тогда имеем короткие точные последовательности (опуская $\mathcal{U}$)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathfrak{m}\oplus\mathfrak{l}\oplus[bc] & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & sl(2) & \to & \mathcal{A} & \to & u(1)_{BC} & \to & 0\,, \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & u(1)_v & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \tag{5}$$

где $u(1)_v$ – 'знаменатель' в модели Казамы–Сузуки, т.е. алгебра, порождаемая током

$$\partial v = \sqrt{\frac{2}{k+2}}(J^0 - BC) \tag{6}$$

(и отщепляющаяся от генераторов (3), (4)). Не только горизонтальная, но и вертикальная точная последовательность расщепляется, что дает два способа описать алгебру $\mathcal{A}$. Прежде всего, это просто $sl(2)\oplus u(1)$, но в то же время это и $\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{l}\oplus[bc]\oplus u(1)_v$, и в этих терминах расщепление горизонтальной последовательности происходит посредством представления духов 'Казамы–Сузуки' в виде

$$B = be^{-\sqrt{\frac{2}{k+2}}(v-\phi)}\,, \quad C = ce^{\sqrt{\frac{2}{k+2}}(v-\phi)}\,. \tag{7}$$

Вложение же $sl(2)\hookrightarrow \mathfrak{m}\oplus\mathfrak{l}\oplus[bc]\oplus u(1)_v$ задается следующими явными формулами:

$$\begin{aligned} J^+ &= e^{\sqrt{\frac{2}{k+2}}(v-\phi)}\,, \qquad J^0 = -i + \sqrt{\frac{2}{k+2}}I + \frac{k}{\sqrt{2(k+2)}}\partial v\,, \\ J^- &= \left\{-(k+2)(T+T_{\rm L}) + i^2 - (k+1)\partial i - \sqrt{2(k+2)}\,I\cdot i\right\}e^{\sqrt{\frac{2}{k+2}}(\phi-v)}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

где $i=-bc$ – духовый ток, $\partial\phi = I$ – лиувиллевский ток, а T и $T_{\rm L}$ – тензоры энергии–импульса материи и поля Лиувилля.

Конструкцию (8) можно рассматривать как вариант бозонизации Вакимото [25]. Очевидная избыточность числа полей может быть устранена преобразованием, явно отщепляющим BC-ток

$$\partial F = i + \sqrt{\frac{2}{k+2}}(\partial v - \partial\phi)\,. \tag{9}$$

Наряду с ∂F вводим новые независимые поля посредством

$$\partial\chi = \sqrt{\frac{k+2}{k}}\,\partial\phi - \sqrt{\frac{2}{k}}\,i\,, \qquad \partial\psi = \sqrt{\frac{k}{k+2}}\,\partial v + \frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}\,\partial\phi - \sqrt{\frac{2}{k}}\,i \tag{10}$$

(с сигнатурами $+$ и $-$ соответственно). Теперь $sl(2)$-токи (8) принимают вид

$$\begin{aligned} J^+ &= e^{\sqrt{\frac{2}{k}}(\psi-\chi)}\,, \qquad J^0 = \sqrt{\frac{k}{2}}\,\partial\psi\,, \\ J^- &= \left[-(k+2)T + k\left(\tfrac{1}{2}\partial\chi\partial\chi + \frac{k+1}{\sqrt{2k}}\,\partial^2\chi\right)\right]e^{-\sqrt{\frac{2}{k}}(\psi-\chi)} \end{aligned} \tag{11}$$

Тем самым, как (8), так и (11), содержат произвольную материю с центральным зарядом d, для которой *не требуется* предполагать бозонизацию, так как она (материя) входит только через свои генераторы Вирасоро.

Используем теперь построенные выше отображения для *явного вычисления* сингулярных векторов. Именно, покажем, что *сингулярные векторы алгебры Каца–Муди* $sl(2)$ *совпадают с топологическими сингулярными векторами.* Напомним, что сингулярные векторы $sl(2)_k$, нумерумые двумя целыми числами r и s, могут быть представлены в виде МФФ [10]

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{MFF}rs\right\rangle = (J_0^-)^{r+(s-1)(k+2)}(J_{-1}^+)^{r+(s-2)(k+2)}(J_0^-)^{r+(s-3)(k+2)}\ldots\\ \ldots(J_0^-)^{r-(s-1)(k+2)}\left|\{\tfrac{r-1}{2},\tfrac{s-1}{2}\}\right\rangle,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\left|\{j_1,j_2\}\right\rangle$ – $sl(2)$-состояние старшего веса с собственным значением J^0, равным

$$j = j_1 - j_2(k+2)\,. \tag{13}$$

Формула (12) не столь безобидна как кажется; она проста только при $s=1$ (сводясь при этом к $(J_0^-)^r$), тогда как, например, состояние $\left|\mathrm{MFF}14\right\rangle$, записанное в виде *полинома* по токам, состоит из 19 различных слагаемых, а $\left|\mathrm{MFF}15\right\rangle$ – уже из 42. Для того чтобы сделать состояния $\left|\mathrm{MFF}rs\right\rangle$ J^0-нейтральными, а также состояниями уровня $l=rs$, требуется домножить их справа на $(J_{-1}^+)^r$.

Теперь мы продемонстрируем появление в точности этих же векторов в топологических теориях. Ввиду краткости данной статьи мы ограничимся примерами на уровне 4, которые, однако, достаточно репрезентативны, поскольку, в отличие, скажем, от уровней 2, 3 и 5, на уровне $4=2\cdot 2$ имеются не одни только 'хорошие' ('thermal' в терминологии [8]) сингулярные векторы. Именно, пара $\{j_1,j_2\}$ принимает значения $\{\frac{3}{2},0\}$, $\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ и $\{0,\frac{3}{2}\}$, так что имеем три возможности:

$$\{\tfrac{3}{2},0\},\ \mathsf{h}=\tfrac{1}{2}(\mathsf{c}-3),\qquad \{\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\},\ \mathsf{h}=\tfrac{1}{6}(\mathsf{c}+3),\qquad \{0,\tfrac{3}{2}\},\ \mathsf{h}=3\,. \tag{14}$$

Этому соответствуют следующие сингулярные состояния.

В первом случае – когда $\{j_1,j_2\}=\{\frac{3}{2},0\}$ и $\mathsf{h}=(\mathsf{c}-3)/2$ – имеем сингулярный вектор

$$
\begin{aligned}
\left|\Upsilon_{\{\frac{3}{2},0\}}\right\rangle = \frac{108}{\tilde{c}^2}\Bigg(&\frac{72(5-2c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-4} + \frac{2(18+12c-11c^2+c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-4} \\
&+ \frac{3(2c-13)}{\tilde{c}}\mathcal{G}_{-3}\mathcal{Q}_{-1} - \frac{2(51-13c+2c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-3}\mathcal{L}_{-1} + \frac{6(1-c)}{\tilde{c}}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}_{-2} \\
&+ \frac{6(13-2c)}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{H}_{-1} + \frac{4(21-16c+2c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1} + \frac{225+13c-2c^2}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-3}\mathcal{G}_{-1} \\
&- \frac{3(33-16c+c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{G}_{-2} - \frac{36}{\tilde{c}}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{Q}_{-1} + \frac{18(c-2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1} \\
&+ 3\mathcal{L}^2_{-2} + \frac{12(3c-2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1} + \frac{4(3-5c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1} + \frac{12}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}^4_{-1} \\
&+ \frac{6(3c-2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1} + \frac{36}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}^2_{-1} - \frac{60}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1} - \frac{36}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}^2_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1} \\
&+ \frac{20}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1} + \frac{6(9-2c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1} - \frac{18(14-c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{G}_{-1} \\
&+ \frac{2(72-5c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{G}_{-1} - \frac{72}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^3_{-1}\mathcal{L}_{-1} + \frac{132}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^2_{-1}\mathcal{L}^2_{-1} \\
&- \frac{108}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^2_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1} - \frac{72}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}^3_{-1} + \frac{132}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\Bigg)\left|(c-3)/2\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где для краткости обозначено $\tilde{c} = c - 3$. Далее, при $\{j_1, j_2\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $h = (c+3)/6$ топологический сингулярный вектор имеет вид

$$
\begin{aligned}
\left|\Upsilon_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}}\right\rangle = \frac{36}{\tilde{c}^4}\Bigg(&\frac{72(-45+6c-5c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-4} - \frac{12(135-9c+15c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-4} \\
&- \frac{3(135+45c-3c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-3}\mathcal{Q}_{-1} + \frac{6(9-30c+c^2)}{\tilde{c}}\mathcal{H}_{-3}\mathcal{L}_{-1} \\
&+ \frac{6(-135-27c+3c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}_{-2} + \frac{6(135+45c-3c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{H}_{-1} \\
&+ \frac{12(-81-9c-3c^2+c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1} + \frac{(-27-6c+c^2)^2}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}^2_{-2} \\
&+ \frac{3(-135+315c+3c^2+c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-3}\mathcal{G}_{-1} + \frac{3(135-63c+33c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{G}_{-2} \\
&- \frac{36(3+c)^2}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{Q}_{-1} + \frac{72(9-3c+c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1} \\
&+ \frac{72(18+3c+c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1} - \frac{108(3+c)}{\tilde{c}}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{36(18+3c+c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}+\frac{36(3+c)^2}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}^2_{-1}\\
&+\frac{12(-135-27c+3c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}+\frac{12(45-6c+c^2)}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1}\\
&+\frac{6(-27-63c+15c^2-c^3)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}-\frac{648c}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&+\frac{36(-9+6c+c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{G}_{-1}-\frac{216(3+c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^3_{-1}\mathcal{L}_{-1}\\
&-\frac{36(9-12c-c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^2_{-1}\mathcal{L}^2_{-1}-\frac{324(3+c)}{\tilde{c}^2}(\mathcal{H}_{-1})^2\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&+36\mathcal{L}^4_{-1}-\frac{72(3+c)}{\tilde{c}}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}^3_{-1}-\frac{36(9-12c-c^2)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&-\frac{36(3+c)}{\tilde{c}}\mathcal{L}^2_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\Bigg)\left|\frac{c+3}{6}\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Наконец, при $\{j_1,j_2\}=\{0,\frac{3}{2}\}$, $\mathrm{h}=3$ имеем сингулярный вектор

$$
\begin{aligned}
\left|\Upsilon_{\{0,\frac{3}{2}\}}\right\rangle=\frac{1296}{\tilde{c}^4}\Bigg(&-\frac{216(15+7c)}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}_{-4}+\frac{36(-15+c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-4}+\frac{270}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-3}\mathcal{Q}_{-1}\\
&-\frac{12(207+c^2)}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}_{-3}\mathcal{L}_{-1}-\frac{216(15+c)}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}_{-2}-\frac{540}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{H}_{-1}\\
&+\frac{12(-6+5c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}+\frac{324}{\tilde{c}^2}(\mathcal{L}_{-2})^2+\frac{30(9+c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-3}\mathcal{G}_{-1}\\
&+\frac{270}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{G}_{-2}-\frac{3888}{\tilde{c}^3}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{Q}_{-1}+\frac{378}{\tilde{c}^2}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\\
&+\frac{36(87+7c)}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}+\mathcal{L}^4_{-1}-\frac{24(12+c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1}+\frac{18(87+7c)}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&+\frac{3888}{\tilde{c}^3}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}^2_{-1}-\frac{1080}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}+\frac{60}{\tilde{c}}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}^2_{-1}\\
&-\frac{162}{\tilde{c}^2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}-\frac{270}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{G}_{-1}-\frac{6(9-4c)}{\tilde{c}^2}\mathcal{Q}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&-\frac{1296}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}^3_{-1}\mathcal{L}_{-1}+\frac{396}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}^2_{-1}\mathcal{L}^2_{-1}-\frac{1944}{\tilde{c}^3}\mathcal{H}^2_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\\
&-\frac{36}{\tilde{c}}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}^3_{-1}+\frac{396}{\tilde{c}^2}\mathcal{H}_{-1}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}-\frac{18}{\tilde{c}}\mathcal{L}^2_{-1}\mathcal{Q}_{-1}\mathcal{G}_{-1}\Bigg)|3\rangle .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Рассмотрим теперь эти сингулярные векторы в 'параметризации Казамы–Сузуки'. Имеем следующее разложение для тензоров энергии–импульса и для примарных состояний:

$$
\widetilde{T}^{\mathrm{S}}-B\partial C=\mathcal{T}+\tfrac{1}{2}\partial v\partial v+\frac{k+1}{\sqrt{2(k+2)}}\partial^2 v\,,\qquad \left|\{j_1,j_2\}\right\rangle\otimes\left|0\right\rangle_{BC}=\left|\mathrm{h}_j\right\rangle\otimes\left|V_j\right\rangle , \tag{18}
$$

где $\mathcal{T}$ – топологический тензор энергии–импульса, h_j выражается через $\{j_1,j_2\}$ уравнением (1) и $V_j=\exp n_j v$, $n_j=j\sqrt{\frac{2}{k+2}}$. Фоновый заряд материи $Q=\sqrt{(1-d)/3}$ теперь равен $Q=\frac{\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{k+2}}$, а из (4) и условий старшего веса находим

$\mathsf{h} = \mathsf{h}_j = -\frac{2j}{(k+2)}$, что позволяет нам переписать (1) в виде параметризации (13) для старшего веса аффинной $sl(2)$ алгебры.

Читая формулы (18) справа налево, находим, что топологические сингулярные состояния $|\Upsilon\rangle$ вычисляются в терминах алгебры Каца–Муди $sl(2)$ следующим образом:

$$|\Upsilon\rangle \otimes |V\rangle = |S\rangle_{sl(2)} \otimes |0\rangle_{BC}, \tag{19}$$

где *в правой части отсутствуют BC-осцилляторы, а состояния $|S\rangle$ – сингулярные векторы алгебры $sl(2)$*. Общие аргументы будут приведены в другом месте, а в данной статье мы сообщаем о явной проверке совпадения состояний $|S\rangle$ с векторами $|\mathrm{MFF}rs\rangle$ (12) на уровнях 2, 3 и 4. Попутно мы получаем полезную перезапись состояний МФФ в форме, использующей сугаваровский тензор энергии–импульса (2), который явно *не* присутствует в оригинальной формулировке (12), но тем не менее нужен при написании соответствующих decoupling-уравнений как *дифференциальных*. Точнее, получаемые в левых частях этих уравнений операторы будут дифференциальными со значениями в алгебре Ли $sl(2)$. Имеются указания на их весьма близкое родство с некоторыми другими расширениями дифференциальных операторов, примененными недавно в работах [27, 28].

Продолжая наш пример векторов на уровне 4, прямым (хотя и несколько утомительным) вычислением получаем, что состояние (15) порождает, в соответствии с (19), следующее $sl(2)$-состояние:

$$\begin{aligned}
|S_{\{\frac{3}{2},0\}}\rangle = {} & (k+2)\Big(3(-112-102k-11k^2+3k^3)J^0_{-4} + 3(8+20k+3k^2-k^3)\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-4} \\
& - 3(6-4k+k^2)J^-_{-3}J^+_{-1} + 3(4-k)(k+2)J^-_{-2}J^+_{-2} - 3(96+59k+4k^2)J^0_{-3}J^0_{-1} \\
& + 3(k-4)(k+2)(7+2k)J^0_{-3}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1} - 3(6+7k-k^2)J^0_{-2}J^0_{-2} + (4-k)(11+3k)J^+_{-4}J^-_0 \\
& + 3(22+6k-k^2)J^+_{-3}J^-_{-1} + 9(k+2)(4+k)\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-3}J^0_{-1} + (k+2)(28-4k-3k^2)\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-3}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1} \\
& + 9(k+2)(\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-2})^2 + 9(4+k)J^-_{-2}J^0_{-1}J^+_{-1} + 3(4-k)(k+2)J^-_{-2}J^+_{-1}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1} \\
& - 18(4+k)J^0_{-2}J^0_{-1}J^0_{-1} + 6(-4+k)(k+2)J^0_{-2}J^0_{-1}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1} + (28+26k+3k^2)J^0_{-2}J^+_{-2}J^-_0 \\
& + (32+13k)J^+_{-3}J^0_{-1}J^-_0 + (k+2)(8+5k)J^+_{-3}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1}J^-_0 - 3(k+2)(6+k)J^+_{-2}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-2}J^-_0 \\
& - 10(k+2)^2\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-2}(\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1})^2 + 3(4+k)J^+_{-2}J^0_{-1}J^0_{-1}J^-_0 + 8(k+2)J^+_{-2}J^0_{-1}\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1}J^-_0 \\
& + 6(k+2)^2J^+_{-2}(\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1})^2J^-_0 + (k+2)^3(\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_{-1})^4\Big)|\{\tfrac{3}{2},0\}\rangle,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_m$ – моды скрученного сугаваровского тензора энергии–импульса. Подставляя далее явные выражения для $\widetilde{L}^{\mathrm{S}}_m$ в терминах токов, мы вычисляем (20) в виде

$$|S_{\{\frac{3}{2},0\}}\rangle = J^+_{-1}J^+_{-1}J^+_{-1}J^+_{-1}J^-_0J^-_0J^-_0J^-_0|\{\tfrac{3}{2},0\}\rangle = J^+_{-1}J^+_{-1}J^+_{-1}J^+_{-1}|\mathrm{MFF}41\rangle. \tag{21}$$

Не менее разительны сокращения и во всех других случаях. Во-первых, нетривиальным образом сокращаются моды BC-духов в выражениях типа (20) при получении их из топологических сингулярных векторов (эти выражения, включающие сугаваровский тензор энергии–импульса, будут приведены в другом месте), но и далее, при подстановке выражения для мод сугаваровского тензора энергии–импульса через токи, наблюдаем совпадение топологических сингулярных векторов с векторами МФФ (12). Так, для рассмотренных выше топологических сингулярных векторов при $\{j_1, j_2\}=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ и $\{j_1, j_2\}=\{0, \frac{3}{2}\}$ читатель может проверить, что вычисляемые по формуле (19) $sl(2)$-состояния $|S\rangle$ имеют вид

$$|S_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}}\rangle = J^{+}_{-1}J^{+}_{-1}|\mathrm{MFF22}\rangle\,, \qquad |S_{\{0,\frac{3}{2}\}}\rangle = J^{+}_{-1}|\mathrm{MFF14}\rangle\,. \tag{22}$$

Принятые выше нормировки для *топологических* сингулярных векторов были выбраны именно из условий точного совпадения в этих формулах. Тем самым, однако, исключалось значение топологического центрального заряда $c=3$. При этом же значении не работает конструкция, представляющая топологическую теорию как гравитационно одетую материю. Тем не менее, с точки зрения топологической алгебры самой по себе, значение $c=3$ ничем не выделено и сингулярные векторы гладко продолжаются к этой точке, для чего достаточно изменить нормировку выписанных выше сингулярных векторов, умножив их на минимально необходимую степень $(c-3)$ и положить $c=3$. С точки зрения $sl(2)$-теории $c\to 3$ соответствует $|k|\to\infty$, и можно явно проследить за тем, как вырождаются при $|k|\to\infty$ отображения Казамы–Сузуки (3), (4): для этого требуется ренормировать токи посредством $J^{0,\pm}\mapsto\sqrt{k+2}J^{0,\pm}$, после чего при $|k|=\infty$ мы остаемся с комплексным скалярным током $J^{\pm}$ и независимым от него током J^0, который отщепляется от $c=3$-топологической алгебры, в то время как сама алгебра теперь конструируется из $J^{\pm}$ и духов BC (последние не ренормируются). Топологические сингулярные состояния при $c=3$ можно рассматривать как 'разрешение' конструкции МФФ при $k\to\infty$. В то время как в исходном представлении (12) такой предел выглядит плохо определенным, можно вычислить его в 'сугаваровской' записи сингулярных векторов, подобной (20).

Итак, мы установили совпадение топологических и $sl(2)$-сингулярных векторов. Тем самым различные объекты в диаграмме (5) имеют общие сингулярные векторы, которые могут быть переписаны разнообразными способами. В частности, наряду с проделанным, возможно вычисление с использованием формул (8): поскольку для $sl(2)$-сингулярных векторов имеется 'явная' (со сделанными после нее оговорками) формула (12), подставляя в нее выражения (8) (или их 'неприводимую' форму (11)), получаем общую формулу для топологических сингулярных векторов, соответствующую интерпретации топологической теории как соответствующим образом одетой материи. При интерпретации топологической теории в виде $\mathfrak{t}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{l}\oplus[bc]$ киральные примарные поля могут быть представлены следующими не зависящими от духов операторами:

$$\Psi = e^{j\sqrt{\frac{2}{k+2}}(v-\phi)}\psi\,, \tag{23}$$

где ψ – примарное состояние материи. Теперь операторные произведения типа $J^-(z)\cdot\Psi(w)$ вычисляются непосредственно, причем, очевидно, слияние двух участвующих здесь экспонент не дает полюсов, в то время как по отношению к входящим в J^- тензорам энергии–импульса поле Ψ имеет *нулевую* размерность.

Интерпретируя топологическую теории как материю, одетую ('зеркальной') гравитацией, можно, вероятно, понять появление алгебры $sl(2)$ как ковариантную (в частности, включающую духи) версию работы [26].

Я пользуюсь случаем поблагодарить В. Лерхе за многочисленные обсуждения.

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, and A.B.Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984).
2. Б.Л.Фейгин, Д.Б.Фукс, Функ. Ан. Прил. **16** N 2, 47 (1982).
3. D.Friedan, Z.Qiu, and S.Shenker, Phys. Rev. Lett. **52**, 1575 (1984).
4. Vl.S.Dotsenko and V.A.Fateev, Nucl. Phys. **B240**, 312 (1984).
5. L.Benoit and Y.Saint-Aubin, Phys. Lett. **B215**, 517 (1988).
6. M.Bauer, Ph.Di.Francesco, C.Itzykson, and J.-B.Zuber, Nucl. Phys. **B362**, 515 (1991).
7. M.Bauer, N.Sochen, Phys. Lett. **B275**, 82 (1992).
8. A.Ch.Ganchev, V.B.Petkova, Phys. Lett. **B293**, 56 (1992); P.Furlan, A.Ch.Ganchev, R.Paunov, and V.B.Petkova, Solutions of the Knizhnik–Zamolodchikov Equations with Rational Isospins, the Reduction to the Minimal Models, preprint.
9. V.G.Kač and D.A.Kazhdan, Adv. Math. **34**, 97 (1979).
10. Ф.Г.Маликов, Б.Л.Фейгин, Д.Б.Фукс, Функ. Ан. Прил. **20** N 2, 25 (1987).
11. T.Eguchi, S.-K.Yang, Mod. Phys. Lett. **A4**, 1653 (1990).
12. E.Witten, Commun. Math. Phys. **118** 411 (1988); Nucl. Phys. B340, 281 (1990).
13. B.Gato-Rivera and A.M.Semikhatov, Phys. Lett. **B288**, 38 (1992).
14. B.Gato-Rivera and A.M.Semikhatov, Nucl. Phys. **B408**, 133 (1993).
15. M.Bershadsky, W.Lerche, D.Nemeschansky, and N.P.Warner, Nucl. Phys. **B401**, 304 (1993).
16. S.Mukhi and C.Vafa, preprint HUTP-93/A002.
17. A.Giveon and M.Roček, preprint NSF-ITP-93-17 (February 1993).
18. F.David, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1651 (1988); J.Distler and H.Kawai, Nucl. Phys. **B321**, 509 (1989).
19. W.Lerche, C.Vafa, and N.P.Warner, Nucl. Phys. **B324**, 427 (1989).
20. A.M.Semikhatov, Nucl. Phys. **B386**, 139 (1992).
21. Y.Kazama and H.Suzuki, Nucl. Phys. **B321**, 232 (1989).
22. T.Eguchi, S.Hosono, and S.-K.Yang, Commun. Math. Phys. **140**, 159 (1991).
23. W.Lerche, Phys. Lett. **B252**, 349 (1990).
24. T.Nakatsu and Y.Sugawara, Nucl. Phys. **B385**, 276 (1992).
25. M.Wakimoto, Comm. Math. Phys. **104**, 604 (1986); Vl.S.Dotsenko, Nucl. Phys. **B338**, 747 (1990).
26. A.M.Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A2**, 893 (1987).
27. L.Brink, T.H.Hansson, and M.A.Vasiliev, Phys. Lett. **B286**, 109 (1992).
28. G.Felder and A.Veselov, Shift operators for the quantum Calogero–Sutherland problems via Knizhnik–Zamolodchikov equation, ETH preprint (1993).