Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.11, стр.930 - 933 ©1993 г. 10 декабря

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ РЯД ОПЕРАТОРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ГЛУБОКО-НЕУПРУГОМ ЛЕПТОН-АДРОННОМ РАССЕЯНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ИЛИ СХОДЯЩИМСЯ?

Б.Л.Иоффе

Институт теоретической и экспериментальной физики

117259 Москва, Россия[1)]

Поступила в редакцию 3 ноября 1993 г.

Сформулированный в заголовке статьи вопрос изучается путем рассмотрения в нерелятивистской квантовой механике задачи о рассеянии электронов на системе из двух частиц, связанных осцилляторным потенциалом. Показано, что в этой задаче ряд является асимптотическим. Высказано предположение, что это свойство ряда характерно для теорий с конфайнментом.

Насколько мне известно, вопрос о том, является ли ряд операторного разложения (ОР) в глубоко-неупругом лептон-адронном рассеянии асимптотическим или сходящимся, удивительным образом не обсуждался в литературе. Ясно, однако, что иметь ответ на этот вопрос было бы желательно как с теоретической, так и с практической точки зрения. Последнее связано с тем, что лучшее понимание типа сходимости ряда по обратным степеням квадрата передаваемого импульса $1/q^2$ в глубоко-неупругом лептон-адронном рассеянии помогло бы оценить область применимости пертурбативной КХД в этих процессах.

Можно привести эвристические аргументы в пользу обоих возможных ответов на поставленный в заглавии статьи вопрос. Первый из аргументов основан на том, что точка $q^2 = \infty$, вблизи которой проводится ОР в импульсном пространстве, является точкой накопления особенностей, отвечающих порогам различных каналов. Поэтому можно ожидать, что ряд разложения вблизи этой точки будет асимптотическим. Этот аргумент не является вполне убедительным, так как накопление сингулярностей в некоторой точке не означает с необходимостью, что степенной ряд вблизи этой точки асимптотический. Аргумент в пользу противоположного ответа возникает, если рассмотреть глубоко-неупругое рассеяние на свободной частице или частице, взаимодействующей со слабым внешним полем. Можно показать, что в этом случае ряд ОР-сходящийся.

Ниже будет рассмотрена модель, в которой поставленный вопрос может быть решен. Рассмотрим в нерелятивистской квантовой механике рассеяние электрона на системе двух частиц ("адроне"), связанных осцилляторным потенциалом. (Обсуждение глубоко-неупругого рассеяния в нерелятивистской квантовой механике и определение структурных функций см. в [1]). Допустим для простоты, что массы m частиц равны и лишь одна из них заряжена, и ее заряд равен 1. В нерелятивистской теории из тензорных компонент $W_{\mu\nu}$, определяющих мнимую часть амплитуд рассеяния вперед виртуального фотона на адроне и структурные функции, остается только компонента W_{00}. Поскольку волновые функции в осцилляторном потенциале хорошо известны

[1)]e-mail: ioffe@vxdesy.desy.de.

и достаточно просты, вычислить структурную функцию в этой модели нетрудно. Такое вычисление было недавно проведено Гринбергом [2]. В общем случае W_{00} есть функция двух переменных: квадрата передаваемого импульса от электрона к адрону q^2 (q является 3-векторным в нерелятивистской теории) и передаваемой энергии q_0. Вместо последней удобнее использовать скейлинговую (бьеркеновскую) переменную

$$x = q^2/4mq_0, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Для W_{00} Гринберг получил

$$W_{00}(q^2, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{q^2}{4m\omega}\right)^n \exp\left(-\frac{q^2}{4m\omega}\right) \delta\left[\frac{q^2}{4m}\left(\frac{1}{x} - 1\right) - n\omega\right], \tag{2}$$

где ω – частота осциллятора.

Предположим, что $q^2/4m\omega \gg 1$ и, следовательно, $n \gg 1$ в (2) при x, не близких к 1; n-ый уровень осциллятора может быть возбужден только в том случае, если имеется определенное соотношение между q^2 и x, вытекающее из обращения в нуль аргумента δ-функции в (2), и, наоборот, каждому такому соотношению отвечает возбуждение одного определенного уровня осциллятора. В этом отношении глубоко-неупругое рассеяние в нашей модели непохоже на глубоко-неупругое электрон-адронное рассеяние. Для того чтобы добиться такого сходства, проведем усреднение (2) по q^2 в интервале Δq^2, удовлетворяющем условиям

$$\Delta q^2 \ll q^2, \qquad \Delta q^2/4m\omega \gg 1. \tag{3}$$

После такого усреднения, используя формулу Стирлинга для $n!$ при больших n, находим из (2):

$$\overline{W}_{00}(q^2, x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{1-x}{kx}}\exp[-kf(x)], \tag{4}$$

где $k^2 = q^2/4m\omega$,

$$f(x) = \frac{1-x}{x}\ln\frac{1-x}{x} + 2 - \frac{1}{x}. \tag{5}$$

Функция $f(x)$ неотрицательна в интервале $0 \le x \le 1$ и обращается в нуль вместе со своей производной при $x = 1/2$. При больших $k \gg 1$ не экспоненциально малое $\overline{W}_{00}(q^2, x)$ возникает только за счет x, близких к $1/2$. Это соответствует утверждению партонной модели, что в данном случае каждый из двух партонов, составляющих адрон, уносит половину импульса адрона.

Последнее утверждение относится только к главному члену в $1/q^2$ разложении. Чтобы изучить весь ряд по $1/q^2$, что является целью нашего исследования, рассмотрим моменты структурной функции и, в частности, первый момент

$$M_1(q^2) \equiv \int_0^1 \overline{W}(q^2, x)dx = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1-x}{kx}}e^{-kf(x)}. \tag{6}$$

Докажем, что разложение (6) по степеням $1/k$ является асимптотическим рядом. Удобно сделать замену переменной интегрирования в правой части (6), положив

$$x = \frac{1}{2}(1+y). \tag{7}$$

При больших k в правой части (6) существенны малые y и можно воспользоваться разложением $f(y)$ в ряд Тэйлора:

$$f(y) = 2y^2 \left[1 - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}y^2 - \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n+1} \left(1 + y + \frac{1-2y}{2n+3} \right) \right]. \tag{8}$$

После подстановки (8) в (6) первый член в правой части (8) дает скейлинговое поведение $M_1(k) \sim 1/k$, вклад членов высшего порядка по y в (8) отвечает членам высшего твиста в глубоко-неупругом рассеянии. Поскольку все члены высшего порядка по y стоят в экспоненте $e^{-kf(y)}$ с одним и тем же положительным знаком, они не могут компенсировать друг друга. Поэтому для доказательства того, что ряд разложения (6) по степеням $1/k$ является асимптотическим, достаточно разложить экспоненту в (6) (кроме первого члена e^{-2ky^2}) по степеням y и отобрать такую совокупность членов в этом разложении, которая привела бы к асимптотическому ряду. Отброшенные при такой процедуре члены могли бы только ухудшить сходимость асимптотического ряда. В качестве такой совокупности выберем первый член в разложении экспоненты

$$\exp\left(2ky^2 \sum_{n=3}^{\infty} y^n \right) \approx 1 + 2ky^2 \sum_{n=3}^{\infty} y^n. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (6) приводит к асимптотическому ряду по $1/k$ для $M_1(k)$ с членами высоких порядков, пропорциональными

$$\frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{k^{(n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2} \right). \tag{10}$$

Конечно, поскольку в разложении экспоненты в (6) по степеням y была учтена только часть членов, сходимость всего асимптотического ряда может быть значительно худшей.

В приведенном выше доказательстве один шаг может вызвать некоторые сомнения – использование формулы Стирлинга для $n!$ при больших n при выводе уравнения (4). Члены высшего порядка по $1/n$, которые были опущены при получении (4), приводят к членам высшего порядка по $1/q^2$. Последнее, в принципе, могли бы компенсировать факториально растущие коэффициенты в асимптотическом ряду (10) и привести к сходящемуся ряду, хотя это выглядит очень неправдоподобно.

Возможность такой компенсации может быть отвергнута по физическим причинам. Процедура усреднения по q^2, которая была использована для установления соответствия данной модели глубоко неупругому рассеянию на адронах, хорошо определена только в пределе больших q^2, когда выполнены неравенства (3). При учете членов высшего порядка по $1/q^2$ эта процедура становится неоднозначной. Поскольку выражение (4) для $\overline{W}_{00}(q^2, x)$ в высших порядках по $1/q^2$ зависит от процедуры усреднения, члены, возникающие как поправки к формуле Стирлинга, в общем случае не могут компенсировать асимптотический ряд (10), не зависящий от процедуры усреднения. Таким образом, наше утверждение остается верным и при учете этого обстоятельства.

Ясно, что приведенные выше рассуждения могут быть повторены для любого момента структурной функции с качественно тем же выводом. Мы приходим к заключению, что в рассмотренной выше задаче – рассеянии электрона на системе двух частиц, связанных осцилляторным потенциалом, ряд ОР является асимптотическим рядом по $1/q^2$. Обсуждаемая модель весьма специфична – это модель с конфайнментом: частицы, на которых происходит рассеяние, не могут наблюдаться в свободном состоянии. В этом отношении модель имеет определенное сходство с КХД. С другой стороны, как отмечалось выше, в задаче о глубоко-неупругом рассеянии на свободной частице или на частице, движущейся в слабом внешнем поле, следует ожидать, что ряд ОР по $1/q^2$ является сходящимся. Отсюда можно высказать гипотезу, что асимптотический характер ряда ОР является характерным свойством теорий с конфайнментом, подобных КХД. Было бы весьма интересно проверить эту гипотезу на других моделях.

Я благодарен О.В.Гринбергу за гостеприимство в Мэрилендском университете, где была начата эта работа, и за полезные обсуждения данной проблемы.

1. B.L.Ioffe, V.A.Khoze, L.N.Lipatov, Hard Processes, North Holland, Amsterdam, 1984, p.p.149, 278–280.
2. O.W.Greenderg, Phys. Rev. **D47**, 331 (1993).