Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.7, стр.385 - 442 ©1993 г. 10 апреля

ЛОКАЛЬНАЯ КАЛИБРОВКА И УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ

М.А.Соловьев

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 1993 г.

Показано, что при инвариантной регуляризации лагранжиана Янга–Миллса, устраняющей ультрафиолетовые расходимости, гауссовы интегралы теории возмущений сосредоточены в точности на тех функциональных классах полей, которые допускают локальную калибровку.

Известно, что для неабелевых полей калибровка локально хорошо определена лишь в том случае, если поля не слишком сингулярны [1–3]. Напротив, описывающие квантовую динамику континуальные интегралы сосредоточены на функциях с плохими дифференциальными свойствами. В данной статье показано, что в рамках теории возмущений противоречие не возникает благодаря ультрафиолетовой регуляризации: если она достаточна для устранения расходимостей, то среди множеств полной меры для гауссовых интегралов имеются допускающие локальную калибровку. Интересным является точное совпадение двух функциональных границ разной природы, которое, по-видимому, не отмечалось в литературе, хотя инвариантная регуляризация служит неотъемлемой составной частью любой попытки строгого определения интегрирования по неабелевым калибровочным полям [4–6].

Рассмотрим регуляризацию лагранжиана Янга–Миллса высшими ковариантными производными:

$$L_{\rm YM} \to L^{reg}_{\rm YM} = \frac{1}{8}\,{\rm tr}\left\{ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^{2m}}\underbrace{\nabla_\kappa\ldots\nabla_\lambda}_{m} F_{\mu\nu}\nabla^\kappa\ldots\nabla^\lambda F^{\mu\nu} \right\},$$

и будем использовать лоренцеву калибровку, в которой регуляризованный свободный пропагатор имеет вид

$$\tilde{\mathcal{D}}^{ab}_{\mu\nu}(p) = -\delta^{ab}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\left(p^2 - \frac{1}{\Lambda^{2m}}p^{2+2m}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Для индекса произвольной диаграммы теории возмущений справедлива оценка

$$\omega \leq 2 + 2m - (2 + 2m - D)\Pi - n_3 - 2n_4 - \ldots - (2 + 2m)n_{4+2m}, \qquad (2)$$

обобщающая соответствующую формулу в [7], где $D = 4$, $m = 2$. Здесь D – размерность пространства-времени. Π - число входящих в диаграмму замкнутых петель, n_i – число вершин с i выходящими линиями. Из оценки (2) следует, что условием устранения всех, кроме однопетлевых, расходимостей служит неравенство

$$m \geq D - 2. \qquad (3)$$

Остающиеся диаграммы регуляризуются с помощью видоизмененной процедуры Паули – Вилларса [7], и, если указанное неравенство строгое, в итоге получается производящий функционал, который не содержит ультрафиолетовых расходимостей.

Теперь обозначим через $(\cdot, \mathcal{D}\cdot)$ корреляционный функционал, задаваемый пропагатором (1) в евклидовом пространстве-времени. В качестве исходной области определения соответствующей гауссовой меры μ можно взять подпространство, выделяемое условием $\partial^\nu A_\nu = 0$ в пространстве S' распределений умеренного роста. На нем мера существует согласно теореме Минлоса, и соблюдается равенство

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(j, \mathcal{D}j)\right\} = \int\limits_{S'} \exp\{i(A, j)\}\mu(dA_\perp). \qquad (4)$$

Для описания свойств носителя μ воспользуемся обозначениями работы [8], где рассмотрен случай свободной бозонной меры. Именно, пусть $Q = 1 + x^2$, $P = 1 - \partial^2$. Далее, пусть $H_{\alpha,\beta}$ - гильбертово пространство поперечных полей со скалярным произведением

$$< A, B >= \int RA^a_\nu RB^{a\nu}dx, \quad \text{где} \quad R = Q^{-\beta}P^\alpha. \qquad (5)$$

Отметим, что локально элементы $H_{\alpha,\beta}$ принадлежат соболевскому классу L^2_q, где $q = 2\alpha$. Выразим участвующие в (4) билинейные формы через скобку (5), считая, что $A \in H_{\alpha,\beta}$. Имеем равенство $(A, j) =< A, J >$, где $J = (R^*R)^{-1}j$ и сопряжение понимается в смысле двойственности между S и S'. Далее, $(j, \mathcal{D}j) =< TJ, TJ >$, где $T = R^{-1}\mathcal{D}^{1/2}R^*R$. Критерием сосредоточенности меры μ на $H_{\alpha,\beta}$ служит принадлежность оператора T классу Гильберта – Шмидта [9]. Поскольку R изометрично отображает $H_{\alpha,\beta}$ на L^2, оператор T принадлежит этому классу в том и только том случае, если $RTR^{-1} = \mathcal{D}^{1/2}R^*$ является оператором Гильберта – Шмидта на L^2. Ядро последнего интегрального оператора имеет вид $K(x - y)(1 + y^2)^{-\beta}$, где

$$\tilde{K}^{ab}_{\mu\nu}(p) = \delta^{ab}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\left(p^2 + \frac{1}{\Lambda^{2m}}p^{2+2m}\right)^{-1/2}(1 + p^2)^\alpha,$$

и оно квадратично интегрируемо, если

$$\alpha < \frac{1}{2}(m+1) - \frac{D}{4}, \qquad \beta > \frac{D}{4}. \tag{6}$$

Таким образом, мера μ сосредоточена на полях, которые локально являются функциями класса L_q^2 с любым $q < m + 1 - D/2$. В том и только том случае, если соблюдается условие ультрафиолетовой конечности $m > D-2$, сюда входят пространства с индексами

$$q \geq D/2 - 1, \tag{7}$$

а это в точности то ограничение, при котором существует калибровка. Доказательство этого факта, изложенное в [2], охватывает случай $D = 4$, $q \geq 1$, но его можно распространить и на другие размерности. Подчеркнем, что из-за грибовских копий [10] речь может идти лишь о локальной калибровке. С другой стороны, наличие копий можно использовать для доказательства необходимости ограничения (7) с помощью простых скейлинговых соображений, которые лежат, кстати, и в основе оценки (2).

Сначала убедимся в существовании гладких и быстро убывающих копий. Пусть $A_\nu(x) = a(r)\hat{n}\partial_\nu\hat{n}$, где $x \in R^3$, $\hat{n} = in_\nu\sigma_\nu$, $n_\nu = x_\nu/r$, σ_ν – матрицы Паули. Калибровочное преобразование $g = \exp\{\alpha(r)\hat{n}\}$ возвращает это поперечное поле на поверхность калибровки, если

$$\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha' - \frac{1}{r^2}(2a+1)\sin 2\alpha = 0. \tag{8}$$

Переходя к переменной $t = \ln r$ и производя линеаризацию, находим, что корнями характеристического уравнения служат 1 и -2. Пусть $\alpha(r)$ – любая ограниченная числом $\pi/2$ гладкая функция без нулей с соответствующим асимптотическим поведением, например, $r/(1+r^3)$. Определим по ней $a(r)$ формулой (8). Нетрудно проверить, что $a(r)$ ведет себя как r^2 при $r \to 0$ и как r^{-3} при $r \to \infty$. Поэтому поле A и его копия A^g регулярны в нуле и на бесконечности и принадлежат любому L_q^2. Теперь совершим масштабное преобразование $A(x) \to \lambda A(\lambda x)$. Оно не нарушает свойство поперечности и переводит калибровочно-эквивалентные поля снова в эквивалентные, связанные преобразованием $g(\lambda x)$. В пределе $\lambda \to \infty$ имеем

$$\| \lambda A(\lambda x) \|_{L_q^2} \approx \lambda^{q+1-D/2} \| A(x) \|_{L_q^2} .$$

Значит, если (7) не соблюдается, этим преобразованием поле и его копию можно сколь угодно приблизить к нулю в смысле топологии L_q^2, что и требовалось показать.

Автор благодарен В.Я.Файнбергу за полезное обсуждение.

---

1. P.K.Mitter and C.M.Viallet, Commun. Math. Phys., **79**, 457 (1981).
2. K.K.Uhlenbeck, Commun. Math. Phys. **83**, 31 (1982).
3. М.А.Соловьев, Письма в ЖЭТФ, **38**, 415 (1983).
4. I.M.Singer, Phys. Scripta, **24**, 817 (1981).
5. M.Asorey and P.K.Mitter, Commun. Math. Phys. **80**, 43 (1981).
6. M.Asorey and F.Falceto, Nucl. Phys. B **327**, 427 (1989).

7. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М.: Наука, 1988.
8. M.Reed and L.Rosen, Commun. Math. Phys. **36**, 123 (1974).
9. Ю.Л.Далецкий, С.В.Фомин, Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М.: Наука, 1983.
10. V.N.Gribov, Nucl. Phys. B **139**, 1 (1978).