Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.9, стр.526 - 529 ©1993 г. 10 мая

БЕЗМАССОВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СУПЕРПОЛЯ ВЫСШИХ ЦЕЛЫХ СУПЕРСПИНОВ

С.М.Кузенко, А.Г.Сибиряков

Томский государственный университет

634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 31 марта 1993 г.

Предложены две (дуальные) суперполевые формулировки для свободных безмассовых $N=1$, $D=4$ супермультиплетов $(s, s+1/2)$, где $s=1,2,\ldots$. При $s=1$ одна из версий совпадает с неминимальной формулировкой [5-7] для супермультиплета $(1,\ 3/2)$.

В предыдущей работе [1] были построены две (дуальные) суперполевые формулировки для свободных безмассовых $N = 1$, $D = 4$ супермультиплетов полуцелого суперспина $(s+1/2)$, где $s = 2,3,\ldots$. Настоящая статья посвящена рассмотрению мультиплетов целого суперспина. Мы покажем, что подобно случаю высших полуцелых суперспинов, для каждого безмассового мультиплета суперспина [1] s, где $s = 1,\ 2,\ldots$, существуют две суперполевые формулировки, дуальные друг другу.

Предлагаемые суперполевые теории, реализующие безмассовое представление супералгебры Пуанкаре с ненулевым целым суперспином s, описываются следующими наборами бозонных суперполей:

$$1.\quad H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)},\quad \Gamma_{\alpha(s)\dot\alpha(s)},\quad \overline{\Gamma}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}; \tag{1}$$

$$2.\quad H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)},\quad G_{\alpha(s)\dot\alpha(s)},\quad \overline{G}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}. \tag{2}$$

В обоих случаях $H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} \equiv H_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}(z)$ – это вещественное суперполе лоренцева типа $(\frac{s-1}{2},\frac{s-1}{2})$, то есть симметричное отдельно по неточечным и по точечным спинорным индексам (обозначения те же, что и в [1]). Комплексные суперполя $\Gamma_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ и $G_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ преобразуются по представлению $(s/2,\ s/2)$ группы Лоренца, но подчинены существенно различным связям: поперечно-линейной

$$\overline{D}^{\dot\beta}\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = 0 \tag{3}$$

и продольно-линейной

$$\overline{D}_{(\dot\alpha_1}G_{\beta_1\ldots\beta_s\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s+1})} = 0 \tag{4}$$

соответственно. Свойства суперполей (3) и (4) подробно обсуждены в [1].

Определим калибровочные преобразования для суперполей $H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$, $\Gamma_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ и $G_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ по закону[2]:

---

[1] Напомним, что безмассовый мультиплет суперспина s описывает две частицы со спинами s и $(s+1/2)$ и зачастую обозначается $(s,\ s+1/2)$.

[2] Симметризация по неточечным и точечным индексам производится независимо.

$$\delta H_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} = D^{\beta} L_{\beta\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} - \overline{D}^{\dot\beta}\overline{L}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}, \tag{5}$$

$$\delta\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} = -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D_{(\alpha_1}\overline{L}_{\alpha_2\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} + i(s+1)\overline{D}^{\dot\beta}\partial_{(\alpha_1(\dot\beta_1}\overline{L}_{\alpha_2\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)}; \tag{6}$$

$$\delta G_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} = -\frac{1}{4}\overline{D}_{(\dot\alpha_1}D^2 L_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_s)}. \tag{7}$$

Здесь $L_{\alpha(s)\dot\alpha(s-1)}$ – произвольное фермионное суперполе лоренцева типа $(\frac{s}{2},\frac{s-1}{2})$.

Функционал действия, который: 1) квадратичен по суперполям H,Γ и $\overline{\Gamma}$; 2) инвариантен относительно преобразований (5) и (6); 3) приводит в компонентах к полевым уравнениям не выше второго порядка по производным, определяется с точностью до постоянного множителя и дается выражением

$$\begin{aligned}
S^{\perp}_{(s,s+1/2)} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z \Big\{ & -\frac{1}{8}H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}D^{\beta}\overline{D}^2 D_{\beta}H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}+ \\
& +\frac{1}{8}\frac{s^2}{(s+1)(2s+1)}[D^{\beta},\overline{D}^{\dot\beta}]H^{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}[D_{(\beta},\overline{D}_{(\dot\beta}]H_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)}+ \\
& +\frac{1}{2}\frac{s^2}{s+1}\partial^{\beta\dot\beta}H^{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}}\partial_{(\beta(\dot\beta}H_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1})}+ \\
& +\frac{2is}{2s+1}H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\partial^{\beta\dot\beta}(\Gamma_{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)})+ \\
& +\frac{1}{2s+1}\left(\overline{\Gamma}^{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\Gamma_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} - \frac{s}{s+1}\Gamma^{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\Gamma_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + \text{э.с.}\right)\Big\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Калибровочный произвол (5), (6) дает возможность при $s > 1$ выбрать калибровку Весса – Зумино:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} &= \theta_{\alpha_1}\bar\theta_{(\dot\alpha_1}h_{\alpha_2\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s-1})} + \theta^2\bar\theta_{(\dot\alpha_1}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{s-1})} - \\
&-\theta^2\theta_{(\alpha_1}\overline{\Psi}_{\alpha_2\ldots\alpha_{s-1})\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}} + \theta^2\bar\theta^2 A_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{s-1}},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} &= \exp(i\theta\sigma^{a}\bar\theta\partial_a)[h_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} + \theta^{\beta}\Psi_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s}+ \\
&+\theta_{(\alpha_1}\Psi_{\alpha_2\ldots\alpha_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} + \bar\theta^{\dot\beta}\bar\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_s(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)} + \theta^2 B_{\alpha_1\ldots\alpha_s\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s}+ \\
&+\theta^{\beta}\bar\theta^{\dot\beta}U_{(\beta\alpha_1\ldots\alpha_s)(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)} + \bar\theta^{\dot\beta}\theta_{(\alpha_1}F_{\alpha_2\ldots\alpha_s)(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)} + \theta^2\bar\theta^{\dot\beta}\bar\rho_{\alpha_1\ldots\alpha_s(\dot\beta\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s)}].
\end{aligned}$$

Все выписанные компонентные поля полностью симметричны по неточечным и по точечным индексам; бозонные поля $h_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$, $h_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$ и $A_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ вещественны, а поля $B_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ и $U_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s+1)}$ комплексны. Как ясно из размерных соображений, компонентные поля $A_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$, $B_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$, $U_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s+1)}$, $F_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s+1)}$, $\lambda_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}$ и $\rho_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}$ являются вспомогательными. После интегрирования в (8) по θ, $\bar\theta$ и исключения вспомогательных полей мы получаем объединенную теорию свободных бозонных полей

$$h_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}, \quad h_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$$

и фермионных полей

$$\Psi_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}, \quad \Psi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s)}, \quad \Psi_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} + \text{э.с.}$$

При этом бозонный сектор действия совпадает с действием Фронсдала [2] для безмассового поля спина s, а фермионный сектор – с действием Фанга и Фронсдала [3] для безмассового поля спина $(s+1/2)$. Тем самым теория (8) с $s > 1$ описывает безмассовый мультиплет суперспина s. Нетрудно убедиться, что в случае $s = 1$ теория (8) описывает супермультиплет $(1, 3/2)$.

Функционал действия суперполей H, G и $\bar{G}$, инвариантный относительно калибровочных преобразований (5) и (7), имеет более простую по сравнению с (8) структуру,

$$S^{\|}_{(s,s+1/2)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z \left\{ \frac{1}{8} H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} D^\beta \overline{D}^2 D_\beta H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \right.$$
$$+ \frac{s}{s+1} H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} (D^\beta, \bar{D}^{\dot\beta} G_{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} - \overline{D}^{\dot\beta} D^\beta G_{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)}) +$$
$$\left. + \left(\overline{G}^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} G_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + \frac{s}{s+1} G^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} G_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + \text{э.с.} \right) \right\}. \tag{10}$$

Теории (8) и (10) эквивалентны, поскольку они связаны преобразованием дуальности через следующее вспомогательное действие:

$$S[H, \Gamma, V] = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \int d^8z \left\{ \frac{1}{8} H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} D^\beta \bar{D}^2 D_\beta H_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{s+1} (s H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} D^\beta \bar{D}^{\dot\beta} V_{\beta\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} + 2\Gamma^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} V_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} +$$
$$\left. + (s+1) \bar{V}^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} V_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + s V^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} V_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} + \text{э.с.}) \right\}. \tag{11}$$

где $V_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}$ – произвольное комплексное суперполе лоренцева типа $(s/2, s/2)$. Следовательно, функционал (10) описывает свободный безмассовый мультиплет суперспина s. Другое доказательство этого факта состоит в следующем. Единственными калибровочно-инвариантными напряженностями, выживающими на массовой оболочке теории (10), являются киральное суперполе лоренцева типа $(s, 0)$

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_s\beta_1\ldots\beta_s} = \frac{si}{2} \partial_{(\alpha_1}{}^{\dot\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_{s-1}}{}^{\dot\alpha_{s-1}} \overline{D}^{\dot\alpha_s} D_{\alpha_s} G_{\beta_1\ldots\beta_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} +$$
$$+ \partial_{(\alpha_1}{}^{\dot\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_s}{}^{\dot\alpha_s} G_{\beta_1\ldots\beta_s)\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_s} \tag{12}$$

и сопряженное к нему. На уравнениях движения $W_{\alpha(2s)}$ становится D-поперечным:

$$D^\beta W_{\beta\alpha(2s-1)} = 0, \tag{13}$$

то есть представляет собой on-shell безмассовое суперполе суперспиральности

В заключение остановимся на обсуждении случая $s = 1$, который изучался ранее в литературе. Для супермультиплета (1,3/2) известны две off-shell формулировки: минимальная [4] и неминимальная [5-7]. Функционал (10) при $s = 1$ совпадает с суперполевым действием для неминимального (1, 3/2)-мультиплета [7]. Теория (8) при $s = 1$ реализует новую off-shell формулировку для супермультиплета (1, 3/2), в которой динамика описывается спин-тензорным суперполем $\Phi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}$, возникающим по правилу $\bar{\Gamma}_{\alpha\dot{\alpha}} = D^{\beta}\Phi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}$.

---

1. С.М.Кузенко, В.В.Постников, А.Г.Сибиряков, Письма в ЖЭТФ **57**, 521 (1993).
2. C.Fronsdal, Phys. Rev. **D18**, 3624 (1978).
3. J.Fang and C.Fronsdal, Phys. Rev. **D18**, 3630 (1978).
4. В.И.Огиевецкий, Э.Сокачев, Письма в ЖЭТФ **23**, 66 (1976); J. of Phys. **A10**, 2021 (1977).
5. E.S.Fradkin and M.A.Vasiliev, Nuovo Cim. Lett. **25**, 79 (1979).
6. B. de Wit and J.W. van Holten, Nucl. Phys. **B 155**, 530 (1979).
7. S.J.Gates and W.Siegel, Nucl. Phys. **B 164**, 484 (1980).