РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

# ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*ОСНОВАН В 1965 ГОДУ* — *ТОМ 57, ВЫПУСК 10*
*ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД* — *25 МАЯ, 1993*

Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.10, стр.601 - 605



## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ НЕТРИВИАЛЬНОСТЬ ВСЕЛЕННОЙ И АНИЗОТРОПИЯ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*И.Ю.Соколов*

*Санкт-Петербургский технологический институт*
*198013 Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 1993 г.

В настоящей работе показано, что существует связь между анизотропией реликтового излучения и возможной топологической нетривиальностью Вселенной. Используя факт открытия крупномасштабной (квадрупольной) анизотропии, в данной работе в рамках теории инфляционной Вселенной получено новое ограничение на возможный топологический "радиус" Вселенной: $R > (2/e)R_H = 0,7R_H$, где $R_H$ – радиус наблюдаемого горизонта.

Данные по измерению реликтового излучения (РИ), полученные в проекте COBE [1], позволяют утверждать, что открыта анизотропия РИ. Причем результаты измерений весьма хорошо совпадают с предсказаниями современной теории инфляционной Вселенной (см., например, [2–4]). Не вдаваясь в дискуссию о точности наблюдений COBE, в данной работе показано, что сам факт наличия крупномасштабной (квадрупольной) анизотропии РИ в рамках теории инфляции дает новое ограничение на возможный топологический "радиус" Вселенной.

Коротко напомним схему возникновения анизотропии РИ в теориях инфляции. Удобно считать, что инфляция порождается неким скалярным (инфлантонным) полем $\varphi$ с нетривиальным вакуумным потенциалом. Квантовые флуктуации этого поля $\delta\varphi$ приводят к неоднородностям плотности энергии возникающего вещества, которые ведут к возникновению неоднородностей метрики. Последние, дожив до эры рекомбинации, и служат причиной появления неоднородностей в температуре РИ. Связь между анизотропией РИ и квантовыми флуктуациями $\delta\varphi$ инфлантонного поля $\varphi$ была найдена в работах [2–5].

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_l = \frac{K_l}{6\sqrt{l(l+1)}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{H}{\dot{\varphi}}\delta\varphi(p)|_{p\sim H}, \tag{1}$$

где $T$ - температура РИ, $l$ – номер гармоники в разложении $\Delta T/T$ по мультиполям ($l \geq 2$), $H$ - постоянная Хаббла, точка над $\varphi$ означает производную по времени, $K_l \simeq 12/5$. Под $\delta\varphi(p)$ понимается вклад в $\delta\varphi$ всех возмущений в единичном интервале $\ln p/H$. Смысл записи $p \sim H$ состоит в том, что $H/\dot{\varphi}$ взяты в тот момент времени, когда $p$ становится порядка $H$.

Флуктуации скалярного поля в топологически тривиальной Вселенной получены, например, в работах [6–8], где показано, что $\delta\varphi(p) = H/2\pi$. Независимость $\delta\varphi(p)$ от $p$ (так называемый плоский спектр) обеспечивает нужные начальные возмущения для образования наблюдаемой крупномасштабной структуры.

Рассмотрим теперь возникновение крупномасштабной анизотропии РИ во Вселенной, пространство-время которой имеет топологически нетривиальную структуру $M_n = (S^1)^n \times R^{4-n}$, где $n$=1,2,3; $S^1$ означает замкнутость по пространственной координате. Отметим, что вероятность квантового рождения Вселенной с такой структурой весьма велика [9]. Для простоты будем рассматривать пространство-время с плоской метрикой (в остальных случаях пространство-время становится плоским экспоненциально быстро)

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} dl^2. \tag{2}$$

Найдем квантовые флуктуации поля $\varphi$ в такой Вселенной. Нетривиальность топологии сводится к следующему типу условий на поле:

$$\varphi(x_0, x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3 + n_3 L_3) = \varphi(x_0, \mathrm{x}) \qquad \text{для} \quad M_3,$$

$$\varphi(x_0, x_1, x_2 + n_2 L_2, x_3 + n_3 L_3) = \varphi(x_0, \mathrm{x}) \qquad \text{для} \quad M_2,$$

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3 + n_3 L_3) = \varphi(x_0, \mathrm{x}) \qquad \text{для} \quad M_1, \tag{3}$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$; $L_1, L_2, L_3$ – топологические "радиусы" Вселенной.

Следует отметить, что в данной работе не расссматривается случай, когда поле $\varphi$ может менять знак при $x_i \to x_i + n_i L_i$, $i = 1, 2, 3$ (так называемый случай поля с кручением). Заметим только, что, как отмечено в работе [10], скрученное поле не может быть инфлантонным. Это связано с необходимостью наличия у последнего ненулевого классического конденсата одинакового во всех точкак пространства, а это невозможно, если поле меняет знак.

Уравнение для скалярного поля с метрикой (2) выглядит следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi - e^{-2Ht}\nabla^2\varphi = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим для примера случай $M_3$. Нормированное решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = e^{i\mathbf{k}\mathrm{x}} \frac{H|\eta|^{3/2}}{(L_1 L_2 L_3)^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [C_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) + C_2 H_\nu^{(2)}(k\eta)], \tag{5}$$

причем $C_1, C_2$ – константы, для которых $|C_2|^2 - |C_1|^2 = 1$, $H_\nu^{(1,2)}$ – функции Ганкеля первого и второго рода, $\eta = -e^{-Ht}/H$ – конформное время, $\mathbf{k}$ – конформный импульс ($k = |\mathbf{k}|$), $\nu^2 = 9/4 - m^2/H^2$. Далее будем полагать $m^2 \ll H^2$. Именно такой случай представляет наибольший интерес в свете вопроса об анизотропии РИ. Условия (3) приводят к дискретному спектру k для решения (4):

$$\mathbf{k}^2 = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{2\pi}{L_s}\right)^2 n_s^2 \equiv k_n^2. \tag{6}$$

Найдем теперь флуктуации квантованного скалярного поля, имеющего вид

$$\hat{\varphi} = \sum_n [a_{k_n}^{(-)} \varphi(t, \mathbf{x}) + a_{k_n}^{(+)} \varphi^*(t, \mathbf{x})], \tag{7}$$

где $a^{(-)}$, $a^{(+)}$ – операторы рождения и уничтожения. Квадрат флуктуаций такого поля равен

$$< \varphi^2 > \equiv < 0|\varphi^2|0 > = \sum_n{}' \varphi^* \varphi = \frac{H^2\eta^2}{L_1 L_2 L_3} \sum_n{}' \left(\frac{1}{2k_n} + \frac{1}{2k_n^3 \eta^2}\right), \tag{8}$$

где $|0>$ – вакуум поля, суммирование ведется по всем целым $n_1, n_2, n_3$, штрих над знаком суммы означает, что член с $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ опущен. Отметим, что здесь взяты $|C_2| = 1$, $C_1 = 0$. Такие значения обычно полагаются при достаточно длительном раздувании.

Для простоты будем считать $L_i = L$, $i = 1, 2, 3$. Перейдем к физическим импульсам $\mathbf{p} = \mathbf{k}e^{-Ht}$ и размерам $R = Le^{Ht}$. Тогда выражение (8) примет вид

$$< \varphi^2 > = \frac{1}{R^3} \sum_n{}' \left[\frac{1}{2p_n} + \frac{H^2}{2p_n^3}\right], \tag{9}$$

где $p_n = |\mathbf{p}_n|$ – модуль физического импульса. Причем

$$p_n^2 = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 n_s^2. \tag{10}$$

Приступим к перенормировке $< \varphi^2 >$. Понимая под флуктуациями возмущения на фоне вакуума Минковского, вычитают член, который соответствует вкладу вакуума Минковского. Это обычно сводится к отбрасыванию первого члена в (9). Однако в топологически нетривиальной Вселенной вычитание вакуумного члена Минковского из первого члена (9) приводит к конечной разности

$$\Delta = \frac{1}{R^3} \sum_n{}' \frac{1}{2p_n} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p}. \tag{11}$$

Нетрудно показать с помощью процедуры регуляризации, скажем, посредством $\zeta$-функции Эпштейна, что разность $\Delta$ имеет вид $\Delta \approx -9/4\pi R^2$, а следовательно, экспоненциально убывает по мере раздувания Вселенной. Поэтому в дальнейшем разностью $\Delta$ будем пренебрегать. Рассмотрим, каковы будут флуктуации, которые порождаются вторым членом в (9). Перенормировку этого члена будем проводить по методу, предложенному в [11], где показано, что можно ограничиваться импульсами $He^{-Ht} < p_n < H$ при нахождении $< \varphi^2 >$ в обычной Вселенной. В случае пространства $M_3$ можно предложить следующее прямое обобщение формул, предложенных в [11]:

$$< \varphi^2 >_{ren} = \frac{1}{R^3} \sum_{He^{-Ht}<p_n<H} \frac{H^2}{2p_n^3}. \qquad (12)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим флуктуациям поля $\varphi$ во Вселенной типа $M_2$:

$$< \varphi^2 >_{ren} = \frac{1}{R^2} \sum_{He^{-Ht}<p_{n_{2,3}}<H} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{H^2}{2p_{n2,3}^3}. \qquad (13)$$

$$p_{n_{2,3}}^2 = p_1^2 + (2\pi/R)^2(n_2^2 + n_3^2)$$

и типа $M_1$:

$$< \varphi^2 >_{ren} = \frac{1}{R} \sum_{He^{-Ht}<p_{n_3}<H} \int \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi)^2} \frac{H^2}{2p_{n_3}^3}. \qquad (14)$$

$$p_{n_3}^2 = p_1^2 + p_2^2 + (2\pi/R)^2 n_3^2.$$

Как отмечалось выше, чтобы найти флуктуации $\delta\varphi(p)$, входящие в формулу (1), необходимо учесть вклад в $\sqrt{< \varphi^2 >_{reg}}$ (12) – (14) всех флуктуаций в единичном интервале $\ln p/H$, то есть брать в формулах (12) – (14) суммы по импульсам от $p$ до $pe$ ($e = 2,17..$). При этом следует помнить, что нельзя выходить за границы сумм (12) – (14), то есть $p > He^{-Ht}$, $pe < H$.

Легко видеть из (12) – (14), что для всех случаев $M_i$, $i = 1,2,3$, можно записать

$$\delta\varphi(p) = \frac{H}{2\pi} f(p), \qquad (15)$$

где $f(p)$ – безразмерная функция импульса. Отметим, что случай $f(p) = 1$ соответствует тривиальной топологии.

Для $M_1$ можно получить выражение для $f(p)$ в явном виде, взяв соответствующие интегралы:

$$f^2(p) = \frac{[x]}{x} - \frac{[xe]}{xe} + \psi([xe]+1) - \psi([x]+1), \qquad (16)$$

где $x = pR/2\pi$, $\psi(y)$ – пси- (ди-гамма)-функция, квадратные скобки означают целую часть.

Нетрудно видеть, что при $xe < 1$ величина $f(p) = 0$. Далее $f(p)$ растет, устремляясь к единице. Выбирая импульс $p$, соответствующим масштабу горизонта ($p_H$), видим, что при $R < 2\pi p_H^{-1}/e = (2/e)R_H$ ($R_H \sim 10^{28}$ см на сегодняшний день) крупномасштабная анизотропия, связанная с размерами горизонта (квадрупольная), вообще должна отсутствовать.

Для случаев $M_2$ и $M_3$ получаются значительно более громоздкие выражения для $f(p)$. Однако $f(p) = 0$ при тех же значениях $R < 2R_H/e$.

Поскольку в эксперименте по программе COBE зарегистрирована квадрупольная анизотропия РИ, можно сделать вывод, что возможный топологический радиус Вселенной

$$R > \frac{2}{e} R_H \approx 0,7 R_H. \qquad (17)$$

Отметим, что имеющееся на сегодняшний день лучшие ограничения [12,13] допускают $R > R_H/7,5$.

В заключение отметим, что для получения ограничения (17) был использован лишь факт наличия квадрупольной анизотропии. Если последующие планируемые эксперименты (COBE, РЕЛИКТ-2) позволят сделать заключение о характере спектра реликтового излучения, это даст возможность существенного усиления ограничения (17). Если будет обнаружено отклонение от плоского спектра, это могло бы быть интерпретировано как указание на возможную топологическую нетривиальность Вселенной в больших масштабах. Более того, анализируя аномалии спектра РИ в масштабах, меньших горизонта, можно получить информацию о топологической структуре Вселенной и в мелких масштабах.

Автор благодарен В.М.Мостепаненко, А.А.Старобинскому, А.В.Нестеруку за полезные замечания, а также Американскому астрономическому обществу за финансовую поддержку данной работы.

---


1. G.A.Tammann, Europhys. News **23**, 97 (1992).
2. С.Ф.Шандарин, А.Г.Дорошкевич, Я.Б.Зельдович, УФН **139**, 83 (1983).
3. А.А.Старобинский, Письма АЖ **9**, 579 (1983).
4. А.Д.Линде, Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
5. Л.А.Кофман, А.Ю.Погосян, А.А.Старобинский, Письма АЖ **12**, 419 (1985).
6. В.Ф.Муханов, Письма в ЖЭТФ, **40**, 133 (1985).
7. A.A.Starobinsky, Phys. Lett. B **117**, 175 (1982).
8. T.S.Bunch and P.C.W.Davies, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
9. Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский, Письма АЖ **10**, 323 (1984).
10. Yu.P.Goncharov and A.V.Nesteruk, Europhys. Lett. **14**, 719 (1991).
11. A.Vilenkin, Nucl. Phys. B **226**, 527 (1983).
12. Д.Д.Соколов, А.А.Старобинский, АЖ **52**, 1041 (1975).
13. L.Z.Fang and Y.L.Liu, Mod. Phys. Lett. **3A**, 1221 (1988).