

УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНХРОТРОННОГО СВЕТА В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С ЖЕСТКОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

O.Е.Шишанин

Автомобилестроительный институт

109280 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1993 г.

После переработки 26 апреля 1993 г.

Рассмотрено движение и магнитотермозное излучение электрона в сильнофокусирующем магнитном поле. Показано, что вертикальные бетатронные колебания частины существенно меняют угловые распределения интенсивности излучения.

Данный вопрос для однородного и слабофокусирующего магнитных полей был рассмотрен, в частности, в работах [1,2].

Предположим, что электрон движется в системе, где градиенты магнитного поля больше 1 и равняются n_1 и $-n_2$ для одного периода. Если эту ступенчатую функцию разложить в ряд Фурье, то уравнения Лоренца при линейном подходе примут вид

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \frac{1-n(\tau)}{N^2}\rho = 0, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{n(\tau)}{N^2}z = 0, \quad (1)$$

где

$$\tau = N\varphi, \quad n(\tau) = \frac{n_-}{2} + \frac{2n_+}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\tau}{2k+1},$$

N – число элементов периодичности на всей круговой траектории, $n_+ = n_1 + n_2$, $n_- = n_1 - n_2$, $\rho = r - R$, R – радиус основного вращения. Частные решения этих уравнений будем искать в виде

$$\rho = \exp(i\gamma_x\tau)\varphi_x(\tau), \quad z = \exp(i\gamma_z\tau)\varphi_z(\tau).$$

Раскладывая затем в полученных выражениях φ_x , φ_z , γ_x , γ_z в ряды по степеням $1/N$ и исключая секулярные слагаемые (учитываем только устойчивое движение), асимптотические решения уравнений (1) можно представить в виде

$$\rho = A \cos\left(\frac{\nu_x}{N}\tau + \chi\right)(1-S) + \sqrt{4-2n_-}A \sin\left(\frac{\nu_x}{N}\tau + \chi\right)C, \\ (2)$$

$$z = B \cos\left(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi\right)(1+S) - \sqrt{2n_-}B \sin\left(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi\right)C,$$

где

$$S = \frac{2n_+}{\pi N^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\tau}{(2k+1)^3}, \quad C = \frac{2n_+}{\pi N^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{(2k+1)^4},$$

A , B и χ , ψ – амплитуды и начальные фазы усредненных радиальных и аксиальных колебаний, частоты

$$\nu_x = \sqrt{1-n_- + \nu_z^2}, \quad \nu_z = \sqrt{n_-/2 + \pi^2 n_+^2/48N^2}.$$

При рассмотрении излучения электрона используем так называемый операторный метод [3,4]. Подставляя классические решения (2) в формулы для интенсивности излучения, получим

$$\frac{dW_\sigma(\nu)}{d\Omega} = \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi^4R^2} \int_0^{2\pi} d\psi \epsilon_1^2 K_{2/3}^2 \left(\frac{\nu'}{3} \epsilon_1^{3/2} \right),$$

(3)

$$\frac{dW_\pi(\nu)}{d\Omega} = \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi^4R^2} \int_0^{2\pi} d\psi \epsilon_1 \epsilon_2 K_{1/3}^2 \left(\frac{\nu'}{3} \epsilon_1^{3/2} \right),$$

где

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + \epsilon_2, \quad \epsilon_0 = 1 - \beta^2, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \epsilon_2 = \left[\cos \theta - \nu_{ver} \frac{B}{R} \cos(\psi + \psi_0) \right]^2,$$

$$\cos \psi_0 = \pi n_+ / 4N \nu_{ver}, \quad \nu_{ver} = \sqrt{n_- / 2 + \pi^2 n_+^2 / 12N^2},$$

$$\nu' = \nu(1 + h\omega/E), \quad \omega = \nu\omega_0, \quad \omega_0 = eeH/E.$$

Индексы σ и π означают две ортогональные компоненты поляризации излучения (у первой вектор электрического поля находится в плоскости орбиты).

Если формулы (3) проинтегрировать по углам θ и φ , то найденные спектральные выражения с точностью до A^2/R^2 , B^2/R^2 будут совпадать с соответствующими характеристиками для однородного магнитного поля.

Другой случай мы получим, если проведем суммирование по спектру в (3). Тогда

$$\frac{dW_\sigma}{d\Omega} = \frac{7ce^2}{64\pi^2R^2} \int_0^{2\pi} d\psi \left(\frac{1}{\epsilon_1^{5/2}} - \frac{320}{7\sqrt{3}\pi} \frac{1}{\epsilon_1^4} \frac{h\omega_0}{E} \right),$$

(4)

$$\frac{dW_\pi}{d\Omega} = \frac{5ce^2}{64\pi^2R^2} \int_0^{2\pi} d\psi \left[\left(\cos \theta - \nu_{ver} \frac{B}{R} \cos(\psi + \psi_0) \right)^2 \left(\frac{1}{\epsilon_1^{7/2}} - \frac{256}{5\sqrt{3}\pi} \frac{1}{\epsilon_1^5} \frac{h\omega_0}{E} \right) \right].$$

Если здесь провести интегрирование по θ и ψ , то получим выражения для полной интенсивности:

$$W_\sigma = \frac{7ce^2}{12R^2\epsilon_0^2} \left(1 - \frac{25\sqrt{3}}{7\epsilon_0^{3/2}} \frac{h\omega_0}{E} \right), \quad W_\pi = \frac{ce^2}{12R^2\epsilon_0^2} \left(1 - \frac{5\sqrt{3}}{2\epsilon_0^{3/2}} \frac{h\omega_0}{E} \right).$$

Методы интегрирования первых членов по ψ в (4) были рассмотрены В.Ч.Жуковским и автором в [2]. Введем обозначения:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \cos^2 \theta, \quad q = \nu_{ver} B / R, \quad p = q^2 / \epsilon, \quad g = \cos^2 \theta / \epsilon, \quad p_1 = q^2 / \epsilon_0,$$

$$g_1 = \cos^2 \theta / \epsilon_0, \quad f = \epsilon_0 / \epsilon, \quad \Delta = (1 + p)^2 - 4pg, \quad 2r^2 = 1 - (1 - p) / \Delta^{1/2}.$$

В итоге классическая часть угловых распределений интенсивности излучения в ультраквантитативистском случае может быть представлена в виде

$$\frac{dW_\sigma}{d\Omega} = \frac{14W}{3\pi\epsilon^{5/2}\Delta^{5/4}} \left\{ \left(3 + p_1 + 16\frac{pg}{\Delta} - \frac{2p}{\Delta^{1/2}r^2}G_1 \right) \mathbf{K} + \frac{2\Delta^{1/2}}{f}G_1\mathbf{E} \right\},$$

(5)

$$\frac{dW_\pi}{d\Omega} = \frac{2W}{3\pi\epsilon^{5/2}\Delta^{5/4}} \left\{ \left(G_2 - \frac{p}{\Delta^{1/2}r^2}G_3 \right) \mathbf{K} + \frac{\Delta^{1/2}}{f}G_3\mathbf{E} \right\},$$

где $\mathbf{K}(r)$, $\mathbf{E}(r)$ – полные эллиптические интегралы,

$$W = ce^2/32\pi R^2, \quad G_1 = p_1 - g_1 + (2/\Delta)((p+f)^2 - g^2),$$

$$G_2 = p_1 + \frac{1}{\Delta}(8p(p+f) - 25pg + 15g) + \frac{8pg}{\Delta^2}(9(p-g)^2 - 7f^2 + 2f(p+g))$$

$$G_3 = 1 + 2(p_1 - g_1) + \frac{1}{\Delta}(4(p^2 - f^2) + 3g(p-7f) - 7g^2) + \frac{8gf}{\Delta^2}(7 - 9p^2 + 2p(g-f)).$$

В симметричной модели ($n_1 = n_2$) параметр $q = (\pi n/2\sqrt{3})B/R$. Рассмотрим вопрос о квантовых поправках в (4). Пусть

$$I_k = \int_0^{2\pi} d\psi \epsilon_1^{-k}.$$

В частности,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\epsilon_3 + (\cos\theta - q\cos\psi)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta_1^{1/2} + b}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right),$$

где

$$\epsilon_3 = (1 - \beta^2)\sin^2\theta, \quad a = \epsilon_3 + (\cos\theta + q)^2, \quad \Delta_1 = \epsilon^2\Delta,$$

$$b = \epsilon_3 + \cos^2\theta - q^2, \quad c = \epsilon_3 + (\cos\theta - q)^2.$$

С помощью дифференцирования I_1 три раза по ϵ_3 получим:

$$I_4 = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{\sqrt{\Delta_1^{1/2} + b}} \frac{1}{\Delta_1^2} (5M^3 + M^2(6N - 9) + M(5N^2 - 8N - 1) + 5(N^3 - N^2 - 2N + 1)),$$

где

$$M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{2(\Delta_1^{1/2} + b)}, \quad N = \sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Квантовые поправки к $dW_\sigma/d\Omega$, $dW_\pi/d\Omega$ будут соответственно равны

$$-\frac{5ce^2}{\sqrt{3}\pi^3 R^2} I_4 \frac{\hbar\omega_0}{E}, \quad -\frac{4ce^2}{\sqrt{3}\pi^3 R^2} I_5^2 \frac{\hbar\omega_0}{E},$$

где для второй компоненты интеграл

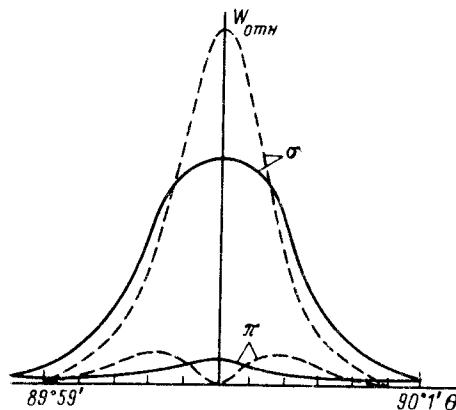
$$I_5^2 = \int_0^{2\pi} d\psi (\cos \theta - q \cos(\psi + \psi_0))^2 / \epsilon_1^5 = \frac{1}{8} I_4 + \frac{1}{48} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \cos \theta^2}.$$

Если вертикальные колебания малы, то при $p \ll 1$ можно провести разложение по p в формулах (5). В этом случае

$$\frac{dW_\sigma}{d\Omega} = \frac{7W}{\epsilon^{5/2}} \left(1 - \frac{5}{4}p + \frac{35}{4}pg \right), \quad (6)$$

$$\frac{dW_\pi}{d\Omega} = \frac{5W}{\epsilon^{5/2}} \left(g + \frac{1}{2}p - \frac{35}{4}pg + \frac{63}{4}pg^2 \right).$$

При $p = 0$ здесь переходим к формулам однородного магнитного поля.



Соответствующие эксперименты, по-видимому, не проводились; тем не менее можно выбрать параметры, близкие к существующим установкам, и по формулам (5), (6) построить графики (квантовые добавки будут малы), см. рисунок. Возьмем $E = 4$ ГэВ, $B = 0,5$ мм, $R = 30$ м, $N = 24$, $n_1 = n_2 = 70$. Для нахождения полных эллиптических интегралов воспользуемся таблицами в [5]. На рисунке для сравнения приведены также кривые для однородного магнитного поля (штриховые линии). Поведение кривых показывает, что вертикальные бетатронные колебания, в частности, размыают острые пики компонент линейной поляризации излучения. Поскольку в плоскости орбиты π -компоненты не обращается в нуль, то синхротронный свет уже не будет полностью поляризованным.

Как видим, роль бетатронных колебаний настолько велика, что у π -компоненты при $\theta = \pi/2$ вместо минимума появляется максимум; для слабой фокусировки это известный факт (см. [6], рис.11). Для данной энергии соответствующий минимум начнет появляться при $B < 0,3$ мм.

1. Синхротронное излучение. Сб. под ред. А.А.Соколова и И.М.Тернова. М.: Наука, 1966.
2. В.Ч.Жуковский, О.Е.Шишанин, ЖЭТФ **61**, 1371 (1971).
3. J.Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **40**, 132 (1954).
4. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. §90.
5. Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш, Специальные функции. М.: Наука, 1977.
6. О.Ф.Куликов, Труды ФИАН **80**, 3 (1975).