

К релятивистской теории туннелирования

В. С. Попов¹⁾, Б. М. Карнаков¹⁾*, В. Д. Мур*

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

* Московский инженерно-физический институт (Государственный университет), 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 января 2004 г.

Построено релятивистское обобщение квазиклассической теории туннельной и многофотонной ионизации атомов и ионов в поле интенсивной электромагнитной волны (рассматриваются случаи линейной, циркулярной и эллиптической поляризации). Для произвольных значений параметра адиабатичности γ вычислен экспоненциальный фактор в вероятности ионизации. В случае низкочастотного лазерного излучения получена асимптотически точная формула для скорости ионизации атомного s -уровня, включая кулоновскую, спиновую и адиабатическую поправки и предэкспоненциальный множитель.

PACS: 03.65.Sq

1. Быстрый прогресс лазерной физики и технологии позволил достичь рекордных интенсивностей $J \sim 10^{21}$ Вт/см² [1, 2], в ближайшие годы планируется повысить их на 1–2 порядка [3]. В столь сильных полях будут образовываться атомные ионы с зарядом $Z \sim 40 \div 60$, для которых энергия связи электронных уровней $E_b = m_e c^2 - E_0$ становится сравнимой с энергией покоя $m_e c^2$. В этом случае подбарьерное движение электрона, приводящее к ионизации, нельзя уже считать нерелятивистским, и требуется обобщение теории ионизации Келдыша [4–8], что и является предметом данной заметки. Ниже указаны уравнения, определяющие подбарьерную траекторию в поле волны и скорость ионизации s -уровня при всех значениях параметра адиабатичности γ , рассмотрен важный для приложений случай ионизации низкочастотным лазерным полем ($\gamma \ll 1$), а также высказаны некоторые критические замечания по выводу недавно опубликованной статьи [9].

В расчетах используется метод мнимого времени (ММВ), дающий наглядное описание процесса туннелирования, в особенности в случае прохождения через барьер, переменный во времени [6–8]. Как правило, далее $\hbar = m_e = c = 1$.

2. Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией задается потенциалами

$$\mathbf{A} = \left(0, -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega} a(\eta), 0 \right), \quad \varphi \equiv 0, \quad (1)$$

где \mathcal{E}_0 – амплитуда поля волны, $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{E}_0 a'(\eta)$, $\eta = \omega(t - x)$, ось x выбрана вдоль направления распространения волны, электрическое поле направлено

вдоль оси y , а магнитное – вдоль оси z . Функция $a(\eta)$ задает форму импульса. Так, $a(\eta) = \sin \eta$ отвечает монохроматическому лазерному свету, $a(\eta) = \eta$ – постоянному скрещенному полю, $a(\eta) = \text{th} \eta$ – солитоноподобному импульсу $\mathcal{E}(t, x) = \mathcal{E}_0 / c \hbar^2 \eta$, и т.д. Уравнения движения для 4-импульса электрона $p^i = (\mathbf{p}, E)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= e\mathcal{E}v_y, & \dot{p}_y &= e\mathcal{E}(1 - v_x), \\ \dot{p}_z &= 0, & \dot{E} &= e(\mathcal{E}\mathbf{v}) = e\mathcal{E}v_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где точка означает производную по лабораторному времени t . При любой зависимости $\mathcal{E}(\eta)$ существует интеграл движения [5]

$$J = E - p_x = (1 - v_x) / \sqrt{1 - v^2} = \eta / \omega \tau, \quad (3)$$

где $\tau = \int^t \sqrt{1 - v^2} dt$ – собственное время частицы. Второе из уравнений (2) дает

$$\frac{dp_y}{d\eta} = \frac{e\mathcal{E}_0}{\omega} a'(\eta), \quad p_y(\eta) = \frac{e\mathcal{E}_0}{\omega} a(\eta) = -eA_y(\eta) \quad (4)$$

(здесь при выборе константы интегрирования мы учли, что после перехода к мнимому времени, $t \rightarrow it$, переменная светового фронта η и импульс p_y становятся чисто мнимыми, ср. с работами [10–12]). Далее находим:

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{J\omega} \frac{dy}{d\tau} = \frac{p_y(\eta)}{J\omega}, \quad y(\eta) = \frac{e\mathcal{E}_0}{J\omega^2} \int_{\eta_0}^{\eta} a(\eta') d\eta', \quad (5)$$

и аналогично определяются $p_x(\eta)$ и $x(\eta)$. Отметим, что решение можно получить в явной форме при любой зависимости поля волны от η .

¹⁾ e-mail: markina@mail.itep.ru, karnak@theor.mephi.ru

Приведем в явном виде подбарьерную траекторию для случая монохроматического лазерного излучения, когда $\alpha(\eta) = \sin \eta$:

$$p_x(\eta) = \frac{1}{4\beta^2 J} \left(\frac{\text{sh } 2\eta_0}{2\eta_0} - \text{ch } 2\eta \right), \quad p_y(\eta) = i\beta^{-1} \text{sh } \eta,$$

$$x = \frac{i\eta}{4\omega\beta^2 J^2} \left(\frac{\text{sh } 2\eta_0}{2\eta_0} - \frac{\text{sh } 2\eta}{2\eta} \right), \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{\omega\beta J} (\text{ch } \eta_0 - \text{ch } \eta), \quad z \equiv 0,$$

где $\beta = \omega/e\mathcal{E}_0$ и мы выполнили замену $\eta \rightarrow i\eta$, отвечающую ММВ. При этом $\eta_0 = -i\omega t_0$, где t_0 – начальный (мнимый) момент времени для подбарьерного движения.

Величины η_0 и J , входящие в (6), определяются из начальных условий [8, 10]

$$E(\eta_0) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + 1} = \epsilon, \quad p_x(\eta_0) = \epsilon - J, \quad (7)$$

(здесь $\epsilon = E_0/m_e c^2$, $0 < \epsilon < 1$, а E_0 – начальная энергия уровня, включая энергию покоя электрона), откуда имеем:

$$\text{sh}^2 \eta_0 = \gamma^2 \cdot \frac{1 - 2\epsilon J + J^2}{1 - \epsilon^2},$$

$$\frac{\text{sh } 2\eta_0}{2\eta_0} = 1 + 2\gamma^2 \frac{1 - J^2}{1 - \epsilon^2}, \quad (8)$$

где γ – параметр адиабатичности, являющийся релятивистским обобщением известного параметра Келдыша [4]

$$\gamma = \omega T_t = \frac{\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (9)$$

и T_t – характерное время туннелирования в электрическом поле \mathcal{E}_0 . Из уравнений (7),(8) определяются η_0 и J в зависимости от параметров задачи γ и ϵ .

Вычисляя вдоль подбарьерной траектории функцию “укороченного действия” [8]

$$W = \int_{t_0}^0 \{ -\sqrt{1 - v^2} + e(\mathbf{A}\mathbf{v}) + \epsilon \} dt =$$

$$= \int_0^{\tau_0} \left\{ 1 - e(\mathbf{A}\mathbf{p}) - \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - v^2}} \right\} d\tau,$$

находим с экспоненциальной точностью скорость ионизации релятивистского связанного состояния:

$$w_R \propto \exp(-2\hbar^{-1} \text{Im } W) = \exp \left\{ -\frac{2m_e c^2}{\hbar\omega} \eta_0 (J - \epsilon) \right\} \quad (10)$$

или

$$w_R \propto \exp \left\{ -\frac{2}{3F} g(\gamma, \epsilon) \right\}, \quad (11)$$

где $g = (\sqrt{1 + \frac{2}{3}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^4/\xi^2\gamma}) \eta_0 (J - \epsilon)$, $\mathcal{E}_S = m_e^2 c^3 / e\hbar = 1.32 \cdot 10^{16}$ В/см – так называемое швингеровское поле, характерное для КЭД [13, 14], $F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$ и введено характерное поле, определяемое начальной энергией уровня:

$$\mathcal{E}_{ch} = \frac{(\sqrt{3}\xi)^3}{1 + \xi^2} \mathcal{E}_S, \quad \xi = [1 - \frac{1}{2}\epsilon(\sqrt{\epsilon^2 + 8} - \epsilon)]^{1/2}. \quad (12)$$

Значение \mathcal{E}_{ch} монотонно возрастает при уменьшении ϵ , то есть с углублением уровня. В нерелятивистском пределе $\mathcal{E}_{ch} = (2I)^{3/2} \mathcal{E}_a$, где $\mathcal{E}_a = \alpha^3 \mathcal{E}_S$, $\alpha = 1/137$ и I – потенциал ионизации (в атомных единицах). При этом (11) переходит в известную формулу Келдыша [4, 15]. Уравнения (8)–(11) дают обобщение ее на случай глубоких уровней и легко решаются на компьютере, см. рис.1.

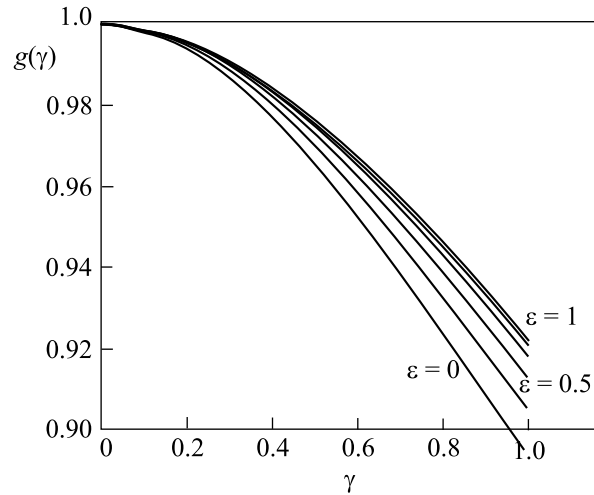


Рис.1. Функции $g(\gamma, \epsilon_0)$ из (11) для монохроматического света (линейная поляризация). Кривые относятся к значениям начальной энергии $\epsilon \rightarrow 1$ (нерелятивистский случай), 0.9, 0.75, 0.5, 0.25 и 0 (сверху вниз)

Аналогичным образом можно рассчитать²⁾ скорость ионизации уровня волной с эллиптической поляризацией (общий случай монохроматического излучения). Вместо системы (8) получаем уравнения

²⁾При этом используются уравнения движения в ММВ. Более элегантный способ решения этой задачи дает использование метода собственного времени, развитого в замечательной статье Фока [16]. Применение метода Фока позволяет рассмотреть общий случай волны с эллиптической поляризацией и приводит к уравнениям (13), но это требует отдельного изложения.

$$\begin{aligned} \text{sh}^2 \eta_0 - \rho^2 (\text{ch} \eta_0 - \text{sh} \eta_0 / \eta_0)^2 &= \gamma^2 [1 + (J - \epsilon)^2 / (1 - \epsilon^2)], \\ (1 - \rho^2) \text{sh} 2\eta_0 / 2\eta_0 + \rho^2 [2(\text{sh} \eta_0 / \eta_0)^2 - 1] &= \\ &= 1 + 2\gamma^2 (1 - J^2) / (1 - \epsilon^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где ρ – эллиптичность света ($-1 \leq \rho \leq 1$, $\rho = 0$ отвечает линейной, $\rho = \pm 1$ – циркулярной поляризации). При этом для $\text{Im } W$ остается справедливой формула (10), в которой, однако, величины η_0 и J должны теперь определяться из (13). Уравнения (13) упрощаются в случае линейной (см. (8)) и циркулярной поляризации, когда $\rho^2 = 1$ и

$$\begin{aligned} (\text{sh} \eta_0 / \eta_0)^2 &= 1 + \gamma^2 \frac{1 - J^2}{1 - \epsilon^2}, \\ \text{sh} 2\eta_0 / 2\eta_0 &= 1 + \gamma^2 \frac{1 - \epsilon J}{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Численный расчет дает для функции g кривые рис.2. С ростом эллиптичности функция $g = g(\gamma, \epsilon, \rho)$ монотонно возрастает, а вероятность ионизации со-

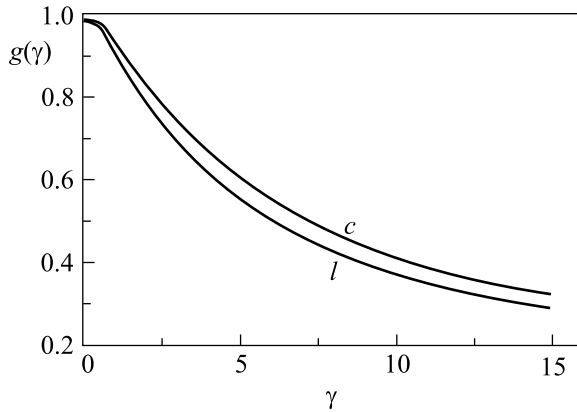


Рис.2. Функция $g(\gamma)$ в случае линейной и циркулярной поляризации (кривые l и c , соответственно) для водородоподобного атома при $Z = 60$

ответственно уменьшается, то есть имеет место качественно та же ситуация, что и в нерелятивистском случае [6].

После довольно длинных вычислений из (10), (13) следует разложение

$$g(\gamma, \epsilon, \rho) = 1 - \frac{1 - \rho^2/3}{10(1 - \xi^2/3)} \gamma^2 + O(\gamma^4), \quad (15)$$

справедливое в адиабатической области $\gamma \ll 1$ (при $\gamma \lesssim 0.5$ оно имеет процентную точность). В нерелятивистском пределе, когда $\xi \sim \alpha\sqrt{I} \ll 1$, эта формула согласуется с [6] для произвольной эллиптичности ρ , а в случае циркулярной поляризации – с результатом, полученным в [5, 6]. Из (15) непосредственно видно, что рост эллиптичности света приводит к

уменьшению вероятности ионизации w_R , а уменьшение ϵ , то есть углубление связанного уровня – наоборот, увеличивает ее (при фиксированном значении приведенного поля F , которое само зависит от энергии уровня).

3. Экспоненциальный фактор в (11) не зависит от спина частицы. В рамках ММВ спиновая поправка к функции действия равна [17]

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{спин}} &= \frac{ie}{2mc} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} \int F^{\alpha\beta} u^\lambda s^\mu d\tau = \\ &= \frac{e}{mc} \int \{ (\mathbf{sH}) - (\mathbf{vs})(\mathbf{vH}) + [\mathbf{vs}] \mathcal{E} \} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что подбарьерная траектория (6) лежит в плоскости (x, y) и $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, получаем

$$\delta S_{\text{спин}} = \frac{e\mathcal{E}_0}{mc} \int_{t_0}^0 s_z a'(\eta) (1 - v_x) dt = -\frac{e\mathcal{E}_0 J}{mc} \int_0^{\eta_0} s_z a'(\eta) d\tau. \quad (17)$$

Поворот спина в однородном внешнем поле определяется уравнением Баргмана–Мишеля–Телегди [18], из которого для случая скрещенных полей вытекает, что $s_z(t) = \text{const}$ и

$$\delta S_{\text{спин}} = -\mu_B \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} s_z a(i\eta_0). \quad (17')$$

В случае постоянного поля $a(i\eta_0) = i \frac{\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{3\xi^2}{(1+\xi^2)}}$; кроме того, нужно учесть еще изменение экспоненциального фактора (11) из-за расщепления уровня ϵ_0 в магнитном поле, в которое входит магнитный момент μ связанного электрона – отличный от магнетона Бора, если $Z\alpha \sim 1$ [19, 20]. В итоге получаем спиновый фактор в скорости ионизации уровня постоянным скрещенным полем:

$$S_{\pm}^{\text{ММВ}} = \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{3} \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} (1 - \mu/\mu_B) \right\}, \quad (18)$$

где знаки \pm соответствуют проекциям спина $\pm \hbar/2$ на направление \mathcal{H} , поэтому состояния с разными s_z имеют и разные скорости ионизации.

Иной способ вычисления спиновой поправки к действию основан на квадрировании уравнения Дирака. Такой подход аналогичен использованному в [21, 22] для релятивистской кулоновской задачи с $Z > 137$. При этом вместо (17) получаем

$$S_{\pm} = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \cdot \exp \left(-\frac{\sqrt{3} \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\mu}{\mu_B} \right), \quad \sigma = \frac{\sqrt{3} \xi}{1 + \sqrt{1 + \xi^2}} \quad (18')$$

и $S_- = 1/S_+$. Выражения (18) и (18') численно близки друг к другу. Так, например, для основного уровня $1s_{1/2}$ в водородоподобном атоме с зарядом $Z = 60$, согласно Брейту [19], $\mu = 0.933 \mu_B$, откуда $S_+ = 1.046$, а S_+^{MMB} отличается от него всего лишь на 1.5%, для $Z = 92$ имеем: $S_+ = 1.121$, и т.д. Таким образом, результаты этих двух (независимых) расчетов практически совпадают.

При $Z\alpha \ll 1$ имеем: $S_{\pm} \approx S_{\pm}^{\text{MMB}} = 1 + O((Z\alpha)^3)$, то есть вероятность туннелирования не зависит от проекции спина электрона, что и понятно: оператор \hat{s} коммутирует со шредингеровским гамильтонианом и спиновая переменная отщепляется.

4. Максимальные интенсивности J достигаются для ИК лазеров, поэтому случай $\gamma \ll 1$ заслуживает отдельного рассмотрения. Для скорости туннельной ионизации s -уровня можно получить формулу, асимптотически точную в пределе слабого ($\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_{ch}$, или $F \ll 1$) поля:

$$w_R = \frac{E_b}{\hbar} |C_\lambda|^2 D \cdot F^{-(2\nu-3/2)} \times \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{\gamma^2}{10(1-\xi^2/3)} \right) \right\}, \quad \rho = 0, \quad (19)$$

где $E_b = mc^2(1 - \epsilon)$ – энергия связи уровня, $\nu = Z\alpha\epsilon/\sqrt{1 - \epsilon^2}$ – релятивистский аналог эффективного главного квантового числа $n^* = Z/\sqrt{2I}$, а C_λ – асимптотический (на бесконечности) коэффициент волновой функции свободного (без поля волны) атома. Вообще говоря, он может быть найден только численно из уравнений Хартри–Фока–Дирака, но в случае водородоподобного атома имеется аналитическое решение, см., например, [23]. Так, для основного уровня $1s_{1/2}$ при любом Z имеем

$$\epsilon = \nu = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad C_{1s}^2 = 2^{2\epsilon-1}/\Gamma(2\epsilon + 1). \quad (20)$$

Наконец, множитель $D = D(\epsilon, Z)$, не зависящий от амплитуды волны и имеющий довольно громоздкий вид, мы здесь не приводим. Отметим, что кулоновский фактор Q [11], возникающий при учете кулоновского взаимодействия между электроном и атомным остовом (с зарядом Z), вычислен с помощью квазиклассической теории возмущений [7]. Для эллиптической поляризации излучения экспоненциальный фактор в (19) следует заменить согласно (15), а показатель поля F (в предэкспоненте) в случае циркулярной поляризации заменить на $1-2\nu$.

В нерелятивистском пределе формула (19) принимает вид

$$w = \kappa^2 C_\kappa^2 \sqrt{\frac{3F}{\pi}} 2^{2n^*} F^{1-2n^*} \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2 \right) \right\}, \quad (21)$$

где теперь $F = \mathcal{E}_0/\kappa^3$, $\gamma = \omega\kappa/\mathcal{E}_0$ – параметр Келдыша, $\kappa = \sqrt{2I}$ и используются атомные единицы (в случае циркулярной поляризации нужно опустить множитель $\sqrt{3F/\pi}$ и заменить коэффициент $1/10$ в экспоненте на $1/15$). Обобщение формулы (21) на состояния с произвольным орбитальным моментом l дано в [6].

Оценим область применимости нерелятивистской теории ионизации. С экспоненциальной точностью из (11) и (21) получаем:

$$w_R \propto \exp\{-2(\sqrt{3}\xi)^3 \mathcal{E}_S / 3(1 + \xi^2)\mathcal{E}_0\}, \quad (22)$$

$$w_{NR} \propto \exp \left\{ -\frac{2\kappa^3 \mathcal{E}_a}{3\mathcal{E}_0} \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{3} [2(1 - \epsilon)]^{3/2} \frac{\mathcal{E}_S}{\mathcal{E}_0} \right\}. \quad (22')$$

Полагая здесь $\epsilon = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\kappa^2 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$ и учитывая разложения

$$\kappa = Z \left[1 + \frac{1}{8}(Z\alpha)^2 + \dots \right],$$

$$\sqrt{3}\xi = \alpha\kappa + \frac{7}{72}(\alpha\kappa)^3 + \dots = Z\alpha + \frac{2}{9}(Z\alpha)^3 + \dots,$$

находим:

$$w_{NR}/w_R \approx \exp \left\{ -\frac{1}{36}(Z\alpha)^5 \frac{\mathcal{E}_S}{\mathcal{E}_0} \right\}, \quad Z\alpha \ll 1 \quad (23)$$

Отсюда видно, что область применимости нерелятивистской теории Келдыша “затягивается” вплоть до довольно больших Z . Так, например, при $Z = 40, 60$ и 80 и интенсивности излучения $J = 10^{23}$ Вт/см² значения w_{NR} и w_R различаются соответственно в 1.15, 3 и 65 раз. Используя полученные выше формулы, нетрудно уточнить и детализировать эту оценку (рис.3). За недостатком места мы отложим дальнейшее обсуждение этого вопроса до более подробной публикации.

Ионизация релятивистского связанного состояния постоянным скрещенным полем рассматривалась в работе Никишова и Ритуса [5]. Используя уравнение Клейна–Гордона, эти авторы вычислили вероятность w_R ионизации s -уровня, связанного короткодействующими ($Z = 0$) силами, в случае бесспиновой частицы. Выражения (19), (22) и (25) при $Z = v = 0$ совпадают с полученными в работе [5], но записаны в более компактном виде. Совпадение результатов,

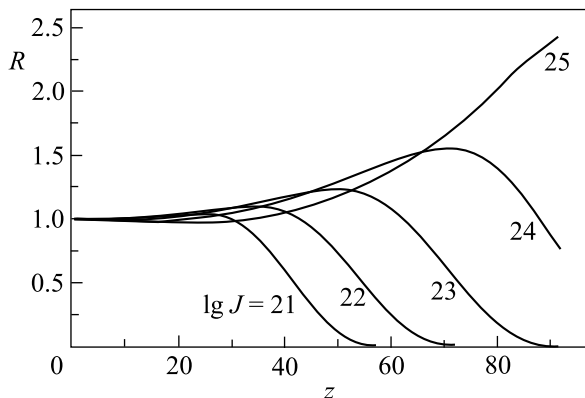


Рис.3. Отношение $R = w_{NR}/w_R$ для основного уровня $1s_{1/2}$ в зависимости от Z для различных интенсивностей лазерного излучения. У кривых указаны значения $\lg J$ [Вт/см²]

полученных двумя независимыми методами, имеет существенное значение для ММВ. Хотя этот метод обладает эвристической силой и физической наглядностью, его все же нельзя считать вполне строго обоснованным, несмотря на некоторые попытки в этом направлении [17].

5. В заключение необходимо остановиться на статье Милосевича, Крайнова и Брабека “Полуклассическая дираковская теория туннельной ионизации” [9], в которой содержится формула (8) для скорости ионизации w_r основного состояния в постоянных скрещенных полях. Данную формулу (которая рассматривается в [9] как “основной результат” этой работы) нетрудно записать в виде

$$w_r = C_\lambda^2 P \tilde{Q} \cdot \text{Ехр}, \quad \hbar = m = c = 1, \quad (24)$$

где множители Ехр и P тождественно совпадают с соответствующими выражениями из работ [5, 10, 11]:

$$\text{Ехр} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\xi^3}{1+\xi^2} \cdot \frac{\mathcal{E}_S}{\mathcal{E}}\right), \quad P = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{1-\xi^2/3}{3+\xi^2}} \cdot \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_S}, \quad (25)$$

а кулоновский фактор \tilde{Q} отличается от нашего (формула (35) в [11]) только заменой показателя $\eta \equiv \nu = Z\alpha\epsilon/\sqrt{1-\epsilon^2}$ на энергию уровня ϵ . Различие между Q и \tilde{Q} связано с тем, что в [9] рассмотрен специальный случай ионизации $1s_{1/2}$ -уровня, энергия которого $\epsilon = \sqrt{1-(Z\alpha)^2}$, а волновая функция имеет простейший вид [23]. Это справедливо, если в атоме имеется лишь один электрон на K -оболочке, а все остальные электроны ободраны (водородоподобный атом с зарядом ядра Z). В этом частном случае $\eta \equiv \epsilon$ и $\tilde{Q} \equiv Q$, а асимптотический коэффициент дается формулой (20) и соответствует [9]. Однако наша

формула для Q является значительно более общей: она применима к многозарядным ионам с произвольной степенью ионизации, если параметры атомного уровня ϵ и C_λ^2 брать из независимых расчетов для свободного ($\mathcal{E} = \mathcal{H} = 0$) атома либо непосредственно из эксперимента, как и в нерелятивистской теории ионизации [5–8].

В [9] не вычислены ни спиновый фактор (18) в вероятности туннелирования, ни поправка (15) порядка γ^2 в экспоненте и не учтена адиабатическая поправка [6], меняющая степень поля в предэкспоненте. Поэтому формула (8) работы [9] могла бы иметь отношение только к случаю постоянных полей. Однако и в этом случае авторы фактически предполагают, что дираковский биспинор \hat{S} , заданный вблизи ядра атома, не меняется в процессе подбарьерного движения электрона (что очевидно из сравнения формул (1),(2) и (5) в [9]), а это неверно. Вызывают удивление слова “Dirac theory” в заглавии статьи [9]: в ней к теории Дирака имеет отношение только нормировочный коэффициент C_λ^2 , который содержится во всех учебниках по квантовой механике [23] (и к тому же лишь на несколько процентов отличается от единицы, например, $C_\lambda^2 = 1$ при малых Z и $C_\lambda^2 = 1.039$ для $Z=60$), а множители P , Q и Ехр не зависят от спина частицы и могут быть вычислены на основе уравнения Клейна–Гордона, как это сделано в работах [5, 10–12].

Формулы, приведенные в статье [9], являются буквальным воспроизведением соответствующих формул ³⁾ из [10–12] с сохранением обозначений (включая переход от энергии уровня ϵ к введенной в [10] удобной переменной ξ , естественным образом возникающей в ММВ). Оригинальный вклад авторов [9] сводится к перемножению факторов Ехр , Q , P и C_λ^2 , известных ранее. Таким образом, статья [9] представляет собой компиляцию работ [10–12], выполненных (и опубликованных) на несколько лет раньше, о чем, однако, в [9] умалчивается. В то же время утверждается [9], что в этой работе дано “for the first time a quantitative description of tunnel ionization of atomic ions” или также “the first quantitative determination of tunneling in atomic ions in relativistic regime” (курсив наш), см. в [9] аннотацию и текст перед уравнением (9).

Ссылка [11] в [9] показывает, что наши работы авторам известны. Однако они рассматриваются как “аналитическое решение уравнения Клейна–Гордона для π^- -атомов в статических электрическом и маг-

³⁾См., например, уравнения (17), (35) и (50) в [11]. При сравнении их с формулой (8) статьи [9] следует учесть, что $eF \equiv \mathcal{E}/F_{cr}$, $F_{cr} \equiv \mathcal{E}_S = 1/e$ и $\mu = Z\alpha$ (при $\hbar = m = c = 1$).

нитном полях”, хотя о π^- -атомах у нас нигде даже не упоминается⁴). Напротив, в [10–12] неоднократно подчеркивается, что нашей целью является обобщение метода мнимого времени на случай релятивистского подбарьерного движения электрона и применение его к теории ионизации глубоких уровней (включая K -оболочку) в тяжелых атомах.

Один из авторов (В.П.) настоящей статьи был уже вынужден отмечать (в связи с так называемой “теорией АДК” [24], подробности см. в [25]) определенную тенденцию к использованию чужих результатов без надлежащего цитирования. В [9] “главный результат” статьи получен простым переписыванием формул из оригинальных работ [5, 10–12].

Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность М. И. Высоцкому, С. П. Гореславскому, В. Р. Золлеру, Н. Б. Нарожному, Л. Б. Окуню, С. В. Попруженко, Ю. А. Симонову, а также участникам XVII-й конференции “Фундаментальная атомная спектроскопия” (Звенигород, декабрь 2003 г.) и Научной сессии МИФИ-2004 (Москва, январь 2004 г.) за обсуждение работы, ценные советы и моральную поддержку. Мы благодарны С. Г. Позднякову за проведение численных расчетов, а также Н. С. Либовой и М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект # 01-02-16850.

1. G. Mourou, C. P. J. Barty, and M. D. Perry, *Phys. Today* **51**(1), 22 (1998).
2. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
3. T. Tajima and G. Mourou, *Phys. Rev. Special Topics – Accelerators and Beams* **5**, 031301 (2002).

4. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
5. А. И. Никишов, В. И. Ритус, *ЖЭТФ* **50**, 255 (1966); **52**, 223 (1967).
6. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
7. А. М. Переломов, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **52**, 514 (1967).
8. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, *ЖЭТФ* **53**, 331 (1967).
9. N. Milosevic, V. P. Krainov, and T. Brabec, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 193001 (2002).
10. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 213 (1997); V. S. Popov, V. D. Mur, and B. M. Karnakov, *Phys. Lett.* **A250**, 20 (1998).
11. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **114**, 798 (1998).
12. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, *ЯФ* **62**, 1444 (1999).
13. W. Heisenberg and H. Euler, *Zeits. Phys.* **98**, 714 (1936).
14. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, М.: Наука (1974).
16. В. А. Фок, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **4-5**, 551 (1937).
17. М. С. Маринов, В. С. Попов, *ЯФ* **15**, 1271 (1972).
18. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 435 (1959).
19. G. Breit, *Nature* **122**, 649 (1928).
20. А. М. Переломов, В. С. Попов, *ЯФ* **14**, 661 (1971).
21. В. С. Попов, *ЯФ* **12**, 429 (1970); **14**, 458 (1971); **64**, 421 (2001).
22. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН* **105**, 403 (1971).
23. L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New-York, 1955.
24. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *ЖЭТФ* **91**, 2008 (1986); Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *УФН* **168**, 531 (1998).
25. В. С. Попов, *УФН* **169**, 819 (1999).

⁴) Для ионизации π^- -атомов требуется повысить напряженность электрического поля на 5 порядков (ибо $\mathcal{E}_S \propto m^2$) и достичь интенсивностей $J \gtrsim 10^{32}$ Вт/см², что выходит далеко за пределы самых смелых фантазий и вообще вряд ли осуществимо на эксперименте из-за рождения e^+e^- -пар из вакуума внешним полем (эффект Швингера [14]).