Письма в ЖЭТФ, том 59, вып.3, стр.155 - 158 ©1994 г. 10 февраля

ПОДДЕРЖАНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Е.М.Тихомолов

Институт солнечно-земной физики СО РАН

664033 Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 25 октября 1993 г.

После переработки 22 декабря 1993 г.

Рассмотрена система уравнений термогидродинамики в приближении Буссинеска, описывающая эволюцию крупномасштабных возмущений в подогреваемом снизу быстро вращающемся слое жидкости. Учет вязкости, деформации верхней свободной поверхности и подогрева приводят к добавлению в уравнение, одним из решений которого являются локализованные вихри Россби, дополнительных членов, имеющих смысл положительной и отрицательной диффузии. Для возмущений достаточно большого масштаба происходит возрастание амплитуды. Численными расчетами для одномерного нелинейного уравнения получено квазистационарное решение.

1. Одним из важных достижений в решении фундаментальной проблемы большого времени жизни Большого Красного Пятна Юпитера (БКПЮ) являются модели, в которых Пятно ассоциируется с уединенным вихрем [1]. Кроме нелинейных эффектов, приводящих к возможности существования локализованной структуры, необходимо также иметь механизм компенсации диссипативных потерь, так как учет диссипации приводит к затуханию вихря за время порядка трех лет [2]. Наиболее распространенной в настоящее время является точка зрения, согласно которой компенсация потерь происходит за счет поступления энергии от неустойчивого зонального сдвигового течения, на профиле которого наблюдается БКПЮ [2]. Однако в течение более чем трехсотлетнего периода наблюдений динамические параметры атмосферы Юпитера менялись довольно значительно [3], и поэтому трудно исключить возможность срыва этого механизма в определенные периоды времени. Желательно дополнительно иметь механизм накачки, основанный на некоторых неизменных, не зависящих от времени свойствах. Как будет показано в данной работе на примере наиболее простой модели, в качестве такого свойства может выступать одна из важных особенностей Юпитера – подогрев атмосферы из нижележащих слоев [4, 5].

2. Рассмотрим подогреваемый снизу неограниченный по горизонтали вращающийся слой жидкости. Уравнения записываются в приближении Буссинеска. Граничные условия отличаются от классической постановки Рэлея [6] следующим моментом: принимается, что нижняя – недеформируемая, а верхняя – деформируемая свободная поверхности. Поверхности поддерживаются при постоянной температуре. Давление на верхней границе равно нулю, на нижней, в силу принимаемого отсутствия касательных напряжений, равна нулю производная давления по вертикальной координате. Рассмотрим случай быстрого вращения, когда квадратный корень из обратного числа Тейлора является малым параметром задачи: $Ta^{-1/2} \ll 1$. Проводя квазигеострофическое разложение, наряду с нелинейными адвективными членами учтем вязкостные, что необходимо делать при выполнении соотношения между горизонтальной компонентой скорости V, коэффициентом кинематической вязкости ν и горизонтальным масштабом L: $V \sim \nu/L$. Для достаточно больших горизонтальных

масштабов течений при $L \gg 1$ диффузия тепла в уравнении теплопроводности учитывается только по вертикальной координате. Для моделирования течений на сфере применяется приближение бета-плоскости. В результате приходим к следующей системе уравнений, которая отличается от обычно применяемой в геофизической гидродинамике [7] наличием диффузионных членов:

$$w_z - \frac{1}{D^2}\Delta_2 p_t - \frac{1}{PD^3}J(p, \Delta_2 p) - \frac{\beta}{D}p_x + \frac{1}{D^2}\Delta_2^2 p + \frac{1}{D^2}\Delta_2 p_{zz} = 0, \tag{1}$$

$$p_z = RT, \tag{2}$$

$$RT_t + u_0 T_x + v_0 T_y - w = T_{zz}, \tag{3}$$

$$u_0 = -\frac{1}{D}p_y, \qquad v_0 = \frac{1}{D}p_x, \tag{4}$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad J(f,g) = f_x g_y - f_y g_x,$$

где p – отклонение от невозмущенного (в отсутствие крупномасштабной деформации и температуры) линейного гидростатического профиля, w – вертикальная компонента скорости, u_0 и v_0 – геострофические горизонтальные компоненты скорости, T – отклонение температуры от гидростатического линейного профиля, найденного в отсутствие деформации поверхности. Переход к безразмерным единицам осуществляется так же, как в работе [6]. R – число Рэлея, P – число Прандтля, число Тейлора $Ta = D^2$, β – параметр, характеризующий бета-эффект – зависимость угловой скорости вращения от широты.

Граничные условия для возмущенных величин записываются следующим образом:

$$z = 0: \qquad T = 0, \qquad p_z = 0, \qquad w = 0; \tag{5}$$

$$z = 1 + h: \qquad T = h, \qquad p = qh, \qquad w = Ph_t + u_0 h_x + v_0 h_y, \tag{6}$$

где q – параметр, характеризующий глубину жидкости, h – отклонение поверхности от невозмущенного состояния.

Решением приведенной системы уравнений является сумма баротропной (с не зависящим от вертикальной координаты распределением давления) и бароклинной составляющих. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) бароклинной составляющей можно пренебречь везде, кроме последнего члена (квазибаротропные течения). Для этого необходимо, чтобы $R \ll q$, и из условия удержания последнего бароклинного члена наряду с предпоследним диффузионным $R \sim q/L^2$. Соотношения будут выполнены при $L \gg 1$, то есть фактически не дают дополнительных ограничений, использованных при квазигеострофическом разложении.

Решением статического уравнения теплопроводности при возмущении $h =$ const с точностью до квадратичных по h членов является: $T_{stat} = zh$. С учетом деформации верхней свободной поверхности в качестве решения для температуры нужно взять $T = zh(x,y)$. Наличие деформации приводит к появлению горизонтальных градиентов температуры. Бароклинная составляющая имеет вид "термического ветра" [7], вращающегося циклонически или антициклонически в зависимости от того, имеется ли понижение или повышение свободной поверхности. Подстановка решения в уравнение теплопроводности приводит к выражению для вертикальной компоненты скорости в виде $w = z(Ph_t + u_0 h_x + v_0 h_y)$, что согласуется с граничными условиями (5), (6).

Интегрирование уравнения (1) по координате z с учетом бароклинной составляющей давления только в последнем члене и квадратичной нелинейности по h в β-члене приводит к уравнению

$$Ph_t - \frac{q}{D^2}\Delta_2 h_t - \frac{q^2}{PD^3}J(h, \Delta_2 h) - \frac{q}{D}\beta(1+h)h_x + \frac{q}{D^2}\Delta_2^2 h + \frac{R}{D^2}\Delta_2 h = 0. \quad (7)$$

Уравнение отличается от уравнения Обухова–Чарни [8] добавлением диффузионных членов с положительным и отрицательным коэффициентами диффузии и учетом нелинейности по h в β-члене. Решение линеаризованного по h уравнения дает критическое значение волнового вектора

$$k_{cr} = (R/q)^{1/2}, \quad (8)$$

разграничивающего растущие и затухающие моды.

Возбуждение баротропной волны, деформирующей верхнюю свободную поверхность в подогреваемом снизу слое жидкости, приводит к возникновению бароклинной составляющей, способной усиливать деформацию.

Подставим в соотношение (8) для критического значения волнового числа $k_{cr} = (\alpha\Delta T)^{1/2}$ значения коэффициента объемного расширения α для Юпитера: $\alpha \sim 6 \cdot 10^{-3}(1/K)$ [9]. Разницу температур между верхней и нижней поверхностями ΔT оценим как $\Delta T \sim 10^\circ$ K. Соотношение для масштаба, с которого начинается усиление, приобретает вид $L \sim 1000$ км, что много меньше размера БКПЮ ~ 10000 км. Таким образом, оценка дает основание полагать возможность поддержания БКПЮ за счет найденного механизма усиления вихревых возмущений.

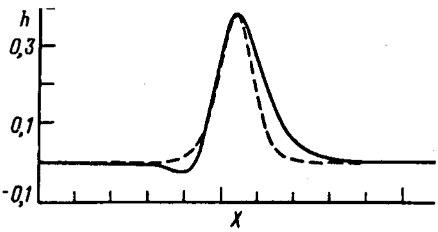
3. Для поддержания стационарной формы БКПЮ необходимо также, чтобы накачка была сбалансирована диссипацией и не приводила к нарушению локализованности вихря. В связи с длинноволновой неустойчивостью, присущей уравнению (7), точных стационарных локализованных решений быть не может: отрицательная диффузия будет приводить к росту шумовых возмущений. Однако при достаточно слабой накачке и, соответственно, большом времени роста шумовых возмущений вихрь, амплитуда и форма которого существенно не меняется за время роста возмущений, может рассматриваться как квазистационарная структура.

В бездиссипативном случае определяющую роль в сохранении локализации крупномасштабных вихрей играет нелинейность, описываемая четвертым членом уравнения (7) [2]. Роль этой нелинейности в установлении баланса, необходимого для сохранения квазистационарной амплитуды и формы вихря, в рассматриваемом случае наиболее просто исследовать на примере одномерного варианта уравнения (7):

$$Ph_t - \frac{q}{D^2}h_{xxt} - \frac{q}{D}\beta(1+h)h_x + \frac{q}{D^2}h_{xxxx} + \frac{R}{D^2}h_{xx} = 0. \quad (9)$$

Уравнение является, с одной стороны, обобщением уравнения Курамото–Сивашинского (добавляется дисперсионный член h_{xxt} [10–11] и, с другой, регуляризованного длинноволнового уравнения (РДВ) (добавляются члены с положительной и отрицательной диффузией) [12].

Для уравнения (9) были проведены численные расчеты. По горизонтальной координате принималось периодическое граничное условие, соответствующее обходу по окружности сферы. В начальный момент времени задавалось возмущение в виде возвышения, имеющее амплитуду 0,1 толщины слоя и являющееся стационарным солитонным решением уравнения в отсутствие диффузионных членов [13]. Далее рассчитывалась его эволюция во времени. При задании нулевого значения числа Рэлея затухание возмущения наблюдалось за время порядка пяти безразмерных единиц. Задание конечного числа Рэлея приводило к росту амплитуды возмущения. Одновременно наблюдалось обострение вершины и укручение переднего фронта импульса за счет нелинейности, что приводило к усилению роли члена с положительной диффузией и прекращению роста амплитуды. Стационарная форма возвышения устанавливалась через промежуток времени порядка сотни безразмерных единиц. На рисунке приведено получаемое решение. Расчет продемонстрировал сохранение амплитуды и формы возвышения в течение времени порядка ста пятидесяти единиц – вплоть до существенного возрастания шумовых возмущений.



Стационарное решение одномерного уравнения с положительной и отрицательной диффузией (сплошная линия) солитонное решение РДВ-уравнения той же амплитуды (штриховая). Значения параметров: $R = 500$, $Ta = 10^4$, $q = 100$, $\beta = 2$, $P = 1$. Стрелкой показано направление дрейфа

Можно предположить, что и в двумерном случае роль рассматриваемой нелинейности будет приводить к установлению конечной амплитуды вихря. При приложении рассматриваемого в данной работе механизма накачки к БКПЮ необходимо также иметь в виду, что сохранению локализации и единственности Пятна может способствовать наличие зональных течений, сглаживающих шумовые возмущения и приводящих к появлению эффективного порога амплитуды, начиная с которого начинается рост за счет длинноволновой неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, номер проекта 93-02-17014.

1. В.И.Петвиашвили, Письма в ЖЭТФ **32**, 632 (1980).
2. М.В.Незлин, Е.Н.Снежкин. Вихри Россби и спиральные структуры, М.: Наука, 1990.
3. В.Г.Тейфель. Атмосфера планеты Юпитер, М.: Наука, 1969.
4. А.С.Монин, П.Я.Полубаринова-Кочина, В.И.Хлебников. Космология. Гидродинамика. Турбулентность, М.: Наука, 1989.
5. Zi-Ping Sun, G.Schubert, and G.Glatzmaier, Science **260**, 661 (1993).
6. Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, М.: Наука, 1972.
7. J.Pedlosky. Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
8. А.М.Обухов. Турбулентность и динамика атмосферы, Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
9. Г.С.Голицын, Изв. АН СССР, ФАО **27**, 20 (1991).
10. Y.Kuramoto and T.Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. **55**, 356 (1976).
11. G.I.Sivashinsky, Ann. Rev. Fluid Mech. **15**, 179 (1983).
12. D.H.Peregrine, J.Fluid Mech. **25**, 321 (1966).
13. J.C.Eilbeck and G.R.McGuire, Journ. Comp. Phys. **23**, 63 (1977).