Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.1, стр.7 - 10 ©1994 г. 10 июля

ВЛИЯНИЕ МИКРОДВИЖЕНИЯ НА ФУНКЦИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ, ОХЛАЖДАЕМЫХ ЛАЗЕРНЫМ ПОЛЕМ В РАДИОЧАСТОТНОЙ ЛОВУШКЕ

В.А.Алексеев, Д.Д.Крылова

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 апреля 1994 г.

После переработки 31 мая 1994 г.

Найдена зависящая от времени функция распределения иона, охлаждаемого лазерным полем в ловушке с осциллирующим потенциалом.

Высокоточные частотные измерения положения центров линий переходов ионов, охлажденных в радиочастотных ловушках, позволяют надеяться на их использование в качестве радиочастотных и оптических часов (см., например, [1]). Это выдвигает повышенные требования к точности описания их движения в ловушке. Между тем все известные на сегодняшний день теоретические результаты получены с использованием псевдопотенциала [2, 3]. Такой подход не позволяет отразить влияние микродвижения на функцию распределения иона в ловушке и оценить связанные с микродвижением искажения в спектре поглощения иона.

В настоящей работе дано точное решение уравнения Фоккера–Планка для функции распределения по координатам и скоростям $\rho(x, v, t)$ охлаждаемого в радиочастотной ловушке иона

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{F}{m}\frac{\partial \rho}{\partial v} = \beta\frac{\partial}{\partial v}(v\rho) + D\Delta_v\rho, \tag{1}$$

$$F = m(a + b\cos(\Omega t))x.$$

Здесь F – осциллирующая во времени сила, действующая на ион в ловушке, m - масса иона. Правая часть (1) описывает влияние охлаждающего лазерного поля, $m\beta v$ - сила трения, D - коэффициент диффузии в пространстве скоростей [2,4,5]. Для упрощения изложения мы пользуемся одномерным уравнением; обобщение на трехмерный случай очевидно.

Следуя [5], перейдем от (1) к уравнению для фурье-образа функции распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \eta\frac{\partial f}{\partial \xi} - (a + b\cos(\Omega t))\xi\frac{\partial f}{\partial \eta} + \beta\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} = -D\xi^2 f, \tag{2}$$

$$f(\xi, \eta, t) = \int \exp(iv\xi + i\eta x)\rho(x, v, t)dx\,dv.$$

Вдоль траектории, определяемой уравнениями

$$\dot{\xi} = -\eta + \beta\xi, \qquad \dot{\eta} = -(a + b\cos(\Omega t))\xi, \tag{3}$$

левая часть (2) является полной производной по времени $df/dt = -D\xi^2(t)f$. Поэтому

$$f(t) = f_0(\xi_0, \eta_0)\exp(-D\int_0^t \xi^2(t)dt), \tag{4}$$

где $f_0(\xi,\eta)$ – фурье-образ функции распределения при $t=0$; ξ_0 и η_0 – координаты траектории при $t=0$.

Из уравнений (3) имеем

$$\ddot{\xi} - \beta\dot{\xi} - (a + b\cos(\Omega t))\xi = 0. \tag{5}$$

Для функции $\chi = \exp(-\beta t/2)\xi(t)$ получаем уравнение Матье [6]

$$\ddot{\chi} + (A - B\cos^2(\Omega t/2))\chi = 0, \tag{6}$$

$$A = b - a - \beta^2/4, \qquad B = 2b,$$

общее решение которого имеет вид

$$\chi = Ce^{i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\Omega t} + C^* e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* e^{-in\Omega t}, \tag{7}$$

где C – произвольная константа.

Процедура отыскания частоты секулярного движения ω и коэффициентов a_n разработана в [6] и может быть выполнена с любой наперед заданной точностью. Лишь для упрощения записи мы воспользуемся тем обстоятельством, что в обычно используемых ловушках выполняется условие $\beta \ll \omega \ll \Omega$ и $|a_1|, |a_{-1}| \ll |a_0|$. Из (3), (6) и (7) с точностью до членов ω/Ω включительно получаем

$$\begin{gathered}\xi = e^{\beta t/2}(Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t})(1 + \alpha\cos(\Omega t)),\\ \eta = e^{\beta t/2}\left[Ce^{i\omega t}(-i\omega + \alpha\Omega\sin(\Omega t)) + \right.\\ \left. + C^* e^{-i\omega t}(i\omega + \alpha\Omega\sin(\Omega t))\right],\\ \alpha = -b/\Omega^2, \qquad \omega^2 = \alpha^2\Omega^2/2 - a, \qquad |\alpha| \ll 1, \qquad |a| \ll \Omega^2.\end{gathered} \tag{8}$$

Теперь в (4) необходимо выполнить интегрирование по времени. Пренебрегая при этом вносящими малый вклад осциллирующими членами, получим

$$f(\xi,\eta,t) = f_0(\xi_0,\eta_0)\exp\left(-\frac{D\cdot 2|C|^2}{\beta}(e^{\beta t} - 1)\right), \tag{9}$$

$$\xi_0 = C + C^*, \qquad \eta_0 = -i\omega C + i\omega C^*.$$

Для получения окончательного ответа в уравнении (9) величины C и C^* с помощью уравнения (8) должны быть выражены через текущие значения ξ и η:

$$C = 1/2[\xi + i\eta/\omega - iq\xi\sin(\Omega t)]e^{-\beta t/2 - i\omega t}, \qquad q = \alpha\Omega/\omega. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) дают фурье-образ зависящей от времени функции распределения иона в радиочастотной ловушке при произвольной начальной функции распределения. При больших временах $t \gg 1/\beta$ эта функция перестает зависеть от начальных условий (условие нормировки дает $f_0(\xi=0,\eta=0)=1$) и принимает вид

$$f_\infty(\xi,\eta,t)\exp\left[-\frac{D}{2\beta}(\xi^2 + \frac{\eta^2}{\omega^2} - 2q\xi\frac{\eta}{\omega}\sin(\Omega t) + q^2\xi^2\sin^2(\Omega t))\right] \tag{11}$$

или в обычных координатах

$$\rho_\infty(v,x,t)=\frac{\beta\omega}{2\pi D}\exp\left[-\frac{\beta}{2D}(x^2\omega^2(1+q^2\sin^2(\Omega t))+v^2+2xvq\sin(\Omega t))\right]. \qquad (12)$$

Коэффициент $2D/\beta$ зависит от схемы охлаждения и в оптимальных условиях по порядку величины равен [2,3,5,7] $2D/\beta\sim\hbar\Gamma$, где Γ – радиационная ширина линии используемого для охлаждения перехода.

Если начальная функция распределения имеет вид δ-функции $\rho_0(x,v)=$ $=\delta(x-x_0)\delta(v-v_0)$, что соответствует $f_0(\xi,\eta)=\exp(iv_0\xi+ix_0\eta)$, обратное фурье-преобразование функции (9) выполняется аналитически. Получающаяся функция Грина имеет вид

$$\rho(x,v;x_0,v_0,t)=\frac{\omega}{\pi}S\exp(-S\varphi(x,v,t)), \qquad (13)$$

$$\varphi(x,v,t)=\left[\omega x-(\omega x_0\cos(\omega t)+v_0\sin(\omega t))e^{-\beta t/2}\right]^2+$$

$$+\left[v+\omega xq\sin(\Omega t)-(v_0\cos(\omega t)-x_0\omega\sin(\omega t))e^{-\beta t/2}\right]^2,$$

$$S=\frac{\beta}{2D}(1-e^{-\beta t})^{-1}.$$

При $\beta t\gg 1$ эта функция совпадает с (12).

Как видно из (12), предельная функция распределения не является максвелл–больцмановской и, вообще говоря, не позволяет ввести понятие температуры. Проинтегрировав (12) по координате, получим

$$G(v,t)=\int\rho_\infty(v,x,t)dx=\left(\frac{\beta}{2\pi D(1+q^2\sin^2(\Omega t))}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta}{2D}\frac{v^2}{1+q^2\sin^2(\Omega t)}\right).$$

По форме это максвелловское распределение с промодулированной по времени температурой $k_BT=(mD/\beta)(1+q^2\sin^2(\Omega t))$. Средняя температура равна $k_B\overline{T}=$ $=(mD/\beta)(1+q^2/2)$, причем $(q^2/2)(1+q^2/2)^{-1}$ есть относительная доля энергии, связанной с микродвижением.

Трехмерный потенциал ловушки имеет вид $\Phi=(U+V\cos(\Omega t))(x^2+y^2-2z^2)$, то есть между величинами a_i и b_i выполняются соотношения $a_x=a_y=-a_z/2=$ $=a_0$, $b_x=b_y=-b_z/2=b_0$. Поэтому относительная доля энергии микродвижения в трехмерном случае равна $(2-L-2L^2)^{-1}$, $L=a_0\Omega^2/b_0^2$. Отсюда видно, что в микродвижении сосредоточена половина всей энергии в двух случаях [7]: при $L=0$ (отсутствие статического потенциала, $\omega_x=\omega_y=\omega_z/2$) и $L=-1/2(\omega_x=$ $=\omega_y=\omega_z)$. Отметим, что как видно из (8), условием устойчивости ловушки $(\omega_i^2>0)$ является $-1<L<1/2$.

Используя соотношение $m<v_i^2>/2=k_B\overline{T}_i$, можно вычислить важный для стандарта частоты сдвиг Δ, вызванный квадратичным эффектом Допплера,

$$\Delta=-\frac{1}{2}\omega_0\frac{<v^2>}{c^2}=-\omega_0\frac{3D}{\beta c^2}\left(1+\frac{1}{1-L-2L^2}\right),$$

где ω_0 - частота резонансного молекулярного перехода. При приближении к границам устойчивости эта величина возрастает. Минимальное значение Δ достигается при $L=-1/4$, что соответствует $\omega_x^2=\omega_y^2=\omega_z^2/2$.

Важное влияние на функцию распределения иона и предельную температуру могут оказать столкновения с окружающим газом. Если для описания такого влияния используется модель слабых столкновений [5, 8], решения (9), (12) и функция Грина (13) сохраняют свой вид с заменой $\beta \to \beta + \mu$, $D \to D + \mu v_0^2/2$, где μ – частота столкновений, v_0^2 – среднеквадратичная скорость молекул газа. Используя функцию Грина, а точнее ее фурье-образ (9), можно вычислить функцию корреляции [8] и решить вопрос о влиянии микродвижения и столкновений на форму линии поглощения охлажденного в ловушке иона. Такое вычисление требует конкретизации условий измерения и будет выполнено в более подробной публикации.

Настоящая работа частично поддержана Международным научным фондом (ISF), грант M14000 .

---

1. M.G.Raizen, J.M.Gilligan, J.C.Bergquist et al., J. of Modern Optics **39**, 233 (1992).
2. S.Stenholm, Rev. Mod. Phys. **58**, 699 (1986).
3. П.Э.Тошек, УФН **158**, 451 (1989).
4. V.G.Minogin and V.S.Letokhov, Laser light pressure on atoms. Gordon and Breach, 1987.
5. V.A.Alekseev and D.D.Krylova, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1545 (1993).
6. Ф.М.Морс, Г.Фешбах, Методы теоретической физики **1**, М.: ИИЛ, 1958 г., гл.5.2.
7. D.J.Wineland, W.M.Itano, J.C.Bergquist, and R.G.Hulet, Phys. Rev. A **36**, 2220 (1987).
8. V.A.Alekseev, D.D.Krylova, and M.Musha, Opt. Comm. **106**, 100 (1994).