Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.3, стр.178 - 181 ©1994 г. 10 августа

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И КОЛЕБАНИЙ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

Ф.С.Джепаров, В.Е.Шестопал

Институт теоретической и экспериментальной физики

117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 1994 г.

Предложены новые (в том числе и многомерные) асимптотически (при больших временах) точно решаемые (АТР) модели случайных блужданий и колебаний в неупорядоченных средах. Детально рассмотрены одномерные случайные блуждания с нетривиальной элементарной ячейкой и двумерные колебания в простой двумерной решетке. Сформулирован общий метод построения подобных моделей.

1. Теория случайных блужданий в неупорядоченных средах (СБНС) имеет общефизическое значение благодаря широким приложениям в различных областях естествознания и глубоким связям с общими проблемами статистической физики и теории поля (см., например, недавние работы [1–8] и представленную в них литературу). Центральная проблема СБНС состоит в построении $P_{xy}(t) = < \tilde{P}_{xy}(t) >$ – решения кинетического уравнения

$$d\tilde{P}_{xy}(t)/dt = -\sum_z [\tilde{w}_{zx}\tilde{P}_{xy}(t) - \tilde{w}_{xz}\tilde{P}_{zy}(t)], \qquad \tilde{P}_{xy}(0) = \delta_{xy}, \tag{1}$$

усредненного по случайному распределению скоростей переходов $\tilde{w}_{xz}$. Здесь $\tilde{P}_{xy}(t)$ – условная вероятность обнаружить возбуждение в момент t в узле решетки x, если при $t = 0$ оно было в y.

К основным достижениям теории СБНС можно отнести прогресс в исследовании асимптотики больших времен в одномерных системах [1], последовавший за пионерскими работами [9, 10]. Точных результатов о многомерных задачах много меньше, а надежные расчеты коэффициентов диффузии для систем с немалыми флуктуациями скоростей $\tilde{w}_{xz}$ есть лишь для модели изотропных случайных прыжков (МИСП) [11] (модели случайных ловушек) и ее модификаций [6, 8]. В этой модели проанализированы и предасимптотические процессы [8].

Теория колебаний в неупорядоченных средах (КНС) во многом близка теории СБНС в тех случаях, когда наблюдаемыми являются асимптотики больших времен или низких частот пропагатора, либо низкоэнергетическое поведение плотности состояний [1, 12]. Здесь аналог МИСП – задача со случайными массами. Асимптотически точно решаемые (АТР) многомерные модели КНС со случайными силами ранее в литературе, по-видимому, не рассматривались.

В настоящей работе предложены новые АТР модели. В одномерном случае они значительно богаче известных ранее [1, 6, 8, 9, 11] по структуре элементарных переходов. В многомерном случае мы впервые предлагаем АТР модели векторных колебаний со случайными силовыми матрицами. Существенно, что новые модели допускают естественные свойства симметрии в распределении параметров среды.

2. Рассмотрим симметричные случайные блуждания на целочисленной прямой Z, разбитой на ячейки длиной N. Пусть n – номер ячейки, ν – номер узла в ячейке, а ненулевые $\tilde{w}_{xz} = \tilde{w}_{zx}$ имеют вид $\tilde{w}_{Nn+\nu-1,Nn+\nu} = \xi_n^\nu$, $\nu = 1 \div N$, $\tilde{w}_{Nn-N,Nn} = \xi_n$. Вводя $\tilde{P}_{mn}^{\mu\nu}(t) = \tilde{P}_{Nm+\mu,Nn+\nu}(t)$, имеем:

$$d\tilde{P}/dt = -B\xi C\tilde{P}, \qquad \tilde{P}_{mn}^{\mu\nu}(t=0) = \delta_{\mu\nu}\delta_{mn},$$

$$B_{mn}^{\mu\nu} = (\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu+1,\nu})\delta_{mn} + \delta_{\mu N}\delta_{\nu 1}(\delta_{mn} - \delta_{m+1,n}), \qquad C = B^+, \tag{2}$$

$$\xi_{mn}^{\mu\nu} = \delta_{mn}(\hat{\xi}_m)^{\mu\nu} = \delta_{mn}\xi_m^{\mu\nu} = \delta_{mn}(\xi_m^\mu\delta_{\mu\nu} + \xi_m),$$

где $\delta_{\mu+N,\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Предполагается, что случайные матрицы $\hat{\xi}_m$ имеют одинаковые и независящие от m распределения, и что существует обратный момент $< (\hat{\xi}_m)^{-2J} >$, $J > 1$. Применяя технику из [8], вполне допустимую при матрично-значных $\hat{\xi}_m$, получим разложение лаплас-образа пропагатора $\tilde{P}(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt\tilde{P}(t)\exp(-\lambda t)$,

$$\tilde{P}(\lambda) = (\lambda + B\xi C)^{-1} = \lambda^{-1}[1 - B\xi(\lambda + CB\xi)^{-1}C],$$

$$\xi(\lambda + CB\xi)^{-1} = (\lambda/\xi + CB)^{-1} = \sum_{j=1}^{J}(G\lambda\eta)^j G + (G\lambda\eta)^{J+1}(\lambda/\xi + CB)^{-1}, \tag{3}$$

$$G = (\lambda/\kappa + CB)^{-1}, \qquad \eta = \kappa^{-1} - \xi^{-1}, \qquad \kappa^{-1} =< \xi^{-1} > .$$

Усредняя сумму (3) почленно и разлагая каждый ее член в асимптотический ряд при малых λ, получим искомое разложение среднего пропагатора. В главном порядке при $\lambda \to 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

$$< \tilde{P}(\lambda) >\cong (\lambda + B\kappa C)^{-1}, \tag{4}$$

что влечет диффузионную асимптотику больших t [8].

3. Еще одна простая и содержательная одномерная модель получается по той же схеме на основе уравнения (2), если положить $B = 1 - T$, где $(Tf)_x = f_{x+1}$, и принять, что $\xi_{mn}^{\mu\nu} = \delta_{mn}\xi_m^{\mu\nu}$, ограничив случайные матрицы $\xi_m^{\mu\nu}$ только условиями неотрицательности скоростей переходов $\tilde{w}_{xz}$, существованием первых $2J$ обратных моментов, а также трансляционной инвариантностью и независимостью распределений ξ_m в разных ячейках. В этом случае получается более богатая система связей, в которой разрешены все переходы внутри звена, образованного элементарной ячейкой и первым узлом ближайшей справа ячейки.

4. Третья система описывает двумерные колебания в неупорядоченной среде. Пусть "молекулы" единичной массы расположены в узлах $x = (x_1, x_2)$ решетки Z^2 с четной суммой координат x_1+x_2 и каждая из них взаимодействует с двумя ближайшими координационными сферами из той же подрешетки таким образом, что смещения u_x^n удовлетворяют уравнениям

$$d^2u/dt^2 = -\Phi\xi\Phi^+ u, \qquad u(t=0) = v, \qquad du(t=0)/dt = w,$$

$$u_x = (u_x^1, u_x^2), \quad \Phi_{xy}^{1n} = a_n\nabla_{xy}^1 - \sigma b_n\nabla_{xy}^2, \quad \Phi_{xy}^{2n} = b_n\nabla_{xy}^1 + \sigma a_n\nabla_{xy}^2, \quad \sigma^2 = 1, \tag{5}$$

$$\nabla_{xy}^j = \delta_{x+e_j,y} - \delta_{x-e_j,y}, \qquad e_1 = (1,0), \qquad e_2 = (0,1), \qquad (\xi)_{xy} = \xi_x\delta_{xy};$$

здесь $m,n=1\div 2$, a и b – действительные векторы, ξ_x – независимые при разных x, одинаково распределенные, положительно определенные, вещественные, симметричные 2×2-матрицы, определенные в узлах с нечетной суммой координат x_1+x_2. Силовая матрица $\Omega^{mn}_{xz}=(\Phi\xi\Phi^+)^{mn}_{xz}$ связывает каждый узел x с восемью ближайшими узлами той же подрешетки. Импульс сохраняется: $\sum\limits_x \Omega^{mn}_{xz}=0$. В главном порядке по числу $N\to\infty$ узлов в подрешетке и при взаимодействии каждого узла с теми же ближайшими соседями симметричная матрица Ω могла бы иметь $17N$ независимых элементов. В нашей модели их $3N$ – число величин ξ^{mn}_x.

Легко проверить, что распределение $\Phi\xi\Phi^+$ инвариантно к трансляциям и повороту на $\pi/2$ плоскости решетки:

$$x\to sx,\quad u\to su\quad (se_1=e_2,\quad se_2=-e_1). \tag{6}$$

Если же распределения ξ_x и $s\xi_x s^+$ одинаковы, то при $\sigma=1$, $a_1=a_2$ и $b_1=-b_2$ распределение $\Phi\xi\Phi^+$ инвариантно к отражениям относительно осей (при этом $ab=0$).

При наличии средних $<(\xi_m)^{-2J}>$, $J>1$, асимптотика усредненного решения (5) строится по той же схеме, что и для (2), с заменой λ на λ^2, B на Φ, C на Φ^+, и с учетом другой формы начальных условий.

Если распределение ξ инвариантно к (6), то $<\xi_x^{-1}>=1/\kappa$ – скалярная матрица, и в главном порядке при $\lambda\to 0$, $\mathrm{Re}\lambda>0$

$$<u(\lambda)>\cong(\lambda^2-\kappa H)^{-1}(v+\lambda w),\quad H=H_1+H_2,$$

$$H_1^{mn}=b^2\Delta\delta_{mn}+(a^2-b^2)\nabla^m\nabla^n\sigma^{m+n},\quad \Delta=(\nabla^1)^2+(\nabla^2)^2,$$

$$H_2^{mn}=ab\{(1-\delta_{mn})[(\nabla^1)^2-(\nabla^2)^2]+2\sigma\nabla^1\nabla^2\delta_{mn}(-1)^m\}.$$

Оператор H_2 инвариантен к вращениям (6), а H_1 – и к отражениям. В непрерывном пределе (заменяя ∇^i на $\partial/\partial x_i$) при $\sigma=1$ и $ab=0$ оператор H $O(2,R)$-инвариантен. В низкочастотной асимптотике спектр имеет продольную и поперечную звуковые ветви ($\omega_\alpha=c_\alpha k(1-i(\zeta_\alpha k)^2)$, $\alpha=l,t$), причем затухание полностью определяется следующим (пропорциональным $<\eta\lambda^2(\lambda^2/\kappa+\Phi^+\Phi)^{-1}\eta>$) членом разложения эффективной силовой матрицы H по флуктуациям $\eta=\kappa^{-1}-\xi^{-1}$ (см. (3)).

5. Системы (2) и (5) являются примерами из обширного класса АТР моделей, которые в случае СБНС имеют вид

$$d\tilde P^\mu_n/dt=-(B\xi^1F^1\xi^2...F^{M-1}\xi^M C\tilde P)^\mu_n.$$

Здесь 1) $n\in Z^d$ – "номер" ячейки и μ – номер узла в ячейке, 2) операторы CB, $F^1,...,F^{M-1}$ – инвариантны к сдвигам по n, 3) $((F^m)^{-1})^{\mu\mu'}_{nn'}=0$ при $|n-n'|>R_1$, $m=1\div M-1$, 4) при $\mathrm{Re}\lambda>0$ оператор $G=(\lambda+CB)^{-1}$ l_1 – ограничен и $\lambda G^{\mu\mu'}_{nn'}=o(1)$, если $\lambda\to 0$ и $\mathrm{Re}\lambda>0$, 5) $(\xi^m)^{\mu\mu'}_{nn'}=(\xi^m)^{\mu\mu'}_n\delta_{nn'}$, $m=1\div M$, где $(\xi^m)^{\mu\mu'}_n$ распределены инвариантно к тем же сдвигам и $(\xi^m)^{\mu\mu'}_n$, и $(\xi^{m'})^{\nu\iota'}_{n'}$ независимы при $|n-n'|>R_2$, 6) конечны средние $<(\xi^1F^1\xi^2...\xi^M)^{-n}>$, $n=1\div 2J$, где J достаточно велико, 7) неотрицательны скорости переходов, 8) $\sum\limits_{n,\mu}(B\xi^1F^1\xi^2...F^{M-1}\xi^M C)^{\mu\mu'}_{nn'}=0$, то есть сохраняется полная вероятность. Допустима случайность начальных параметров. Здесь, почти как в (3), к цели ведет разложение по флуктуациям операторов $\lambda(\xi^1 F^1 \xi^2 ... \xi^M)^{-1}$ (доказательство асимптотической сходимости в главных чертах то же, что и в [8]).

Сходным образом конструируются модели колебаний, где также допустима нетривиальная элементарная ячейка, а вместо 7) и 8) требуется симметричность силовой матрицы и выполнение закона сохранения импульса.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 93-02-2170).

---

1. J-Ph.Bouchuad, A.Georges, Phys. Rep. **185**, 127 (1990).
2. E.Hernández-Garcia, M.A.Rodriguez, L.Pesquera, and M.San-Miguél, Phys. Rev. **B42**, 10653 (1990).
3. Ю.Г.Абов, М.И.Булгаков, С.П.Боровлев и др., ЖЭТФ **99**, 962 (1991).
4. Ф.С.Джепаров, ЖЭТФ **99**, 982 (1991).
5. J.Bricmont and A.Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1689 (1991).
6. J.W.Haus and K.W.Kehr, Phys. Rev. **44**, 4341 (1991).
7. Proc. of 4th Int. Conf. on Hopping and Related Phenomena, Phil. Mag. **B65**, №4 (1992).
8. Ф.С.Джепаров, В.Е.Шестопал, ТМФ **94**, 496 (1993).
9. J.Bernasconi, S.Alexnder, and R.Orbach, Phys . Rev. Lett. **41**, 185 (1978).
10. Я.Г.Синай, Теор. вероятн. и ее прим. **29**, 247 (1982).
11. P.J.H.Denteneer and M.H.Ernst, Phys. Rev. **B29**, 1755 (1984).
12. W.Schirmacher and M.Wagener, Phil. Mag. **B65**, 607 (1992).