Письма в ЖЭТФ, том 37, вып.3, стр. 155 – 157 *5 февраля 1983 г.*

СЛАБОСВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.П.Андреев, Б.М.Карнаков, В.Д.Мур

Развит модельно-независимый аппарат для расчета спектров слабосвязанных состояний электрона с произвольным моментом l во внешних электромагнитных полях. Приведены некоторые результаты для конкретных полей.

1. Рассмотрим электрон с малой энергией ($kr_c \ll 1$, $k = \sqrt{2E}$, $\hbar = m = e = 1$ в потенциале $U(r)$ радиуса r_c и однородном внешнем поле. В такой задаче уравнение Шредингера (у.Ш.) допускает точное решение на больших расстояниях $r \gg r_c$, а при $r \ll L$ можно пренебречь внешним полем и задача становится сферически симметричной ($L = \epsilon^{-1/3}$ – для электрического поля, $L = (\mathcal{H}/c)^{-1/2}$ –для магнитного поля. Спектр определяется из условия сшивания решений в области

$$r_c \ll r \ll min \; \{ L, k^{-1} \} \tag{1}$$

(условие $L \gg r_c$ предполагает, что поле не слишком сильное, но соотношение между L и k^{-1} может быть произвольным.

Введем полную систему $G_{lm}(\mathbf{r}, E)$ решений (у. Ш.) с $U \equiv 0$, отвечающих затухающим (или расходящимся) волнам при $r \to \infty$. Кроме того, потребуем, чтобы при $r \to 0$ G_{lm} содержали сингулярные слагаемые вида $r^{-l'-1}\, Y_{l'm'}(\mathbf{n})$ только с $l' = l$, $m' = m$, так что в области (1) имеем

$$G_{lm} \approx r^{-l-1}\, Y_{lm} + \sum_{l'm'} A_{lm}^{l'm'}(L, E)\, r^{l'}\, Y_{l'm'} \,. \tag{2}$$

Эти граничные условия однозначно определяют $A_{lm}^{l'm'}$.

В разложении $\psi = \Sigma c_{l'm'} G_{l'm'}$ в области (1) воспользуемся (2) в то же время, если идти со стороны малых r, в этой области имеем

$$\psi_{in} = \Sigma c_{l'm'} Y_{l'm'} [\, r^{-l'-1} + B_{l'}(E)\, r^{l'} \,] , \tag{3}$$

$$\frac{[(2l+1)!!\;]^2}{2l+1}\; B_l = k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l \approx -\frac{1}{a_l} + r_l E,$$

где δ_l, a_l и r_l – фазовый сдвиг, длина рассеяния и эффективный радиус в поле $U(r)$. Если в потенциале $U(r)$ есть мелкий уровень с моментом l, то в этой парциальной волне рассеяние аномально велико, фазы же $\delta_{l' \neq l}$ малы и в (3) можно опустить сингулярные слагаемые $r^{-l'-1}$ с $l' \neq l$. Сшивая ψ и ψ_{in} в области (1), имеем $c_{lm} = \tilde{c}_{lm}$ и из условия существования нетривиального решения для c_{lm} получаем уравнение

$$\det\,(A_{lm}^{lm'}(L, E) - B_l(E)\, \delta_{mm'}) = 0 \,, \tag{4}$$

определяющее энергетический спектр.

Проиллюстрируем метод на конкретных примерах.

2. Для однородного магнитного поля ввиду сохранения l_z (4) распадается на $2l + 1$ независимых соотношений. При $m = \pm l$ имеем

$$G_{l,m=\mp l}(\mathbf{r}, E) = [\,(\frac{\partial}{\partial x} + \omega x \mp i\,(\frac{\partial}{\partial y} + \omega y)]^l\, G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = 0, \tilde{E}) \tag{5}$$

$\tilde{E} = E - (|m| + m)\,\omega$, $\omega = 1/2L^2$, G_0 — функция Грина частицы в однородном магнитном поле. Из сравнения (2) и (5) находим A_{lm}^{lm} после чего (4) дает

$$-\frac{1}{a_l} + r_l\,(E - m\omega) =$$
$$= \frac{2^{2l+3/2}}{\sqrt{\pi}}\,\omega^{l+1/2}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}\left\{\left(\frac{t}{(1-e^{-2t})}\right)^{l+1}\exp\left[-(1+|m|+m-\frac{E}{\omega})t\right]\right\}. \qquad (6)$$

Отметим, что в случае $|m| = l$ магнитное поле подмешивает состояния только с $l' \geqslant l + 2$, вклад которых в энергию подавлен в силу малости $kr_c \ll 1$. Поэтому (6) описывает спектр при произвольных значениях a_l. При $|a_l| \gtrsim L^{2l+1}$ (6) описывает перестройку спектра. Этот вопрос был детально рассмотрен в [1] для случая прямоугольной ямы и $l = 0,1$ [1)]. Если $|a_l| \ll L^{2l+1}$, $a_l < 0$, то из (6) следует формула теории возмущений по длине a_l

$$E_{lm} - (|m| + m + 1)\,\omega \approx -2^{2l+1}\,[\,(2l+1)!!\,]^2\,\omega^{2l+1}\,a_l^2 \qquad (7)$$

(связанное состояние возникает только при наличии магнитного поля). При $r_c^{2l+1} \ll a_l \ll L^{2l+1}$, $a_l > 0$, когда в $U(r)$ имеется мелкий уровень и в отсутствие $\vec{\mathcal{H}}$, из (6) следует известный результат теории возмущений для пара- и диамагнитного сдвигов такого уровня (при этом следует выполнить перенормировку длины рассеяния за счет квадратичного по $\mathcal{H}$ слагаемого в гамильтониане, такая перенормировка существенна лишь для $l \geqslant 2$). В случае $a_l \lesssim r_c^{2l+1}$, $a_l > 0$ в яме нет мелкого уровня и он не появляется при включении магнитного поля.

Отметим, что (6) определяет спектр мелких уровней с $E_{lm} < (|m| + m + 1)\,\omega$; аналитическое продолжение (6) по энергии позволяет получить спектр квазидискретных уровней в более высоких зонах Ландау.

3. Для частицы в поле циркулярно-поляризованной волны переход во вращающуюся систему координат преобразует гамильтониан к виду

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2} + U(r) - \omega l_z + \epsilon x \qquad (8)$$

(ϵ, ω — амплитуда и частота волны). Если в $U(r)$ имеется мелкий уровень с моментом l, то ему соответствуют $2l + 1$ квазидискретных уровней гамильтониана (8). При $l = 1$ (4) распадается на два независимых уравнения: для $m = 0$ и для „перепутанных" $m = \pm 1$. Функция $G_{10}(\mathbf{r}, E) \propto \partial/\partial z\, G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = 0, E)$, где G_0 — функция Грина оператора (8) с $U(r) \equiv 0$ (см. [3]. Для $l = 1, m = 0$ (4) дает

$$-\frac{1}{a_1} + r_1 E_{10} = \frac{4}{i\sqrt{2\pi i}}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\,\frac{d^2}{dt^2}\exp(iE_{10}\,t + if(t)), \qquad (9)$$

$$f(t) = \frac{\epsilon^2}{t\omega^4}(1 - \cos\omega t) - \frac{\epsilon^2}{2\omega^2}t.$$

В низшем по ϵ^2 приближении находим из (9)

$$E_{10} \approx E_1^{(0)} + \frac{4\epsilon^2}{5\sqrt{2}\,\omega^4 r_1}\left[-(\omega - E_1^{(0)})^{5/2} + 2(-E_1^{(0)})^{5/2} + \right.$$

---

1) О перестройке спектра для кулоновского потенциала, искаженного на малых расстояниях см. [2] и цитированную там литературу.

$$+\frac{15}{4}\,\omega^2(-E_1^{(0)})^{1/2}+i(\omega+E_1^{(0)})^{5/2}\Big], \qquad (10)$$

где $E_1^{(0)} < 0$ – энергия уровня в потенциале $U(r)$. При $\omega > |E_1^{(0)}|$ у E_{10} появляется мнимая часть, определяющая ширину уровня за счет однофотонной ионизации. Для ширины уровня при n-фотонной ионизации получаем из (9) ($r_l < 0$ для $l \geqslant 1$:

$$\Gamma_n \approx \frac{12\sqrt{2}}{(-r_1)}\,\frac{(n\omega-|E_1^{(0)}|)^{n+3/2}}{n!\,(2n+3)!!}\left(\frac{\epsilon^2}{\omega^4}\right)^n. \qquad (11)$$

При $\omega \gg |E_1^{(0)}|$ из (10) следует $\mathrm{Re}\,E_{10} \approx \mathrm{Im}\,E_{10} \propto \omega^{-3/2}$. Этот закон нарушается при $\omega \gtrsim r_c^{-2}$ (на таких частотах сдвиг и ширина уровня определяются полем волны при $r \lesssim r_c$), поэтому в рамках изложенного подхода необходимо провести перенормировку длины рассеяния и эффективного радиуса за счет действия поля на малых расстояниях. При $\omega \to 0$ ширина экспоненциально мала; с помощью (9) можно вычислить поправки к сдвигу и ширине квазистационарного состояния, возникающего в статическом пределе.

Один из авторов (С.А.) благодарен участникам семинара И.М.Лифшица за полезное обсуждение и Л.П.Питаевскому за ряд ценных замечаний.

Литература

1. *Андреев С.П., Ткаченко С.В.* ЖЭТФ, 1982, 83, 1816.
2. *Попов В.С., Кудрявцев А.Е., Мур В.Д.* ЖЭТФ, 1979, 77, 1727.
3. *Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П.* ЖЭТФ, 1975, 69, 842.

Инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
4 января 1983 г.