Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 4, стр. 184 – 187 *20 февраля 1983 г.*

УГЛОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ СОСТОЯНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СВЕТА И ПОЛЕВОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ УРОВНЕЙ

А.Г.Рудавец

Выведены волновые уравнения амплитуд вероятности угловых движений вырожденных состояний резонансного перехода под действием света эллиптической поляризации. Спектр полевого расщепления уровней найден в результате квантования азимутальных движений квазичастиц, описываемых этими уравнениями.

1. В резонансных радиационных процессах правила отбора для дипольных переходов регламентируют не только оптические, но и угловые степени свободы. Связанное с последними,

вырождение уровней по направлениям углового момента снимается из-за полевого расщепления, имеющего место в нелинейной спектроскопии [1].

В световых полях линейной и круговой поляризаций гамильтониан резонансного взаимодействия в JM базисе проекций углового момента диагонализуется вследствие аксиальной симметрии. Однако для эллиптически поляризованного света, когда ось симметрии отсутствует, спектр полевого расщепления может быть найден в результате решения секулярного уравнения. Трудности решения этого уравнения растут вместе с ростом J. Здесь предлагается иной путь, особенно полезный в квазиклассическом пределе $J \gg 1$, – волновые уравнения амплитуд вероятности угловых движений в базисе когерентных состояний группы вращений $SU(2)$ [2,3].

Возбужденные светом нормальные волны амплитуд вероятности угловых движений отвечают квазичастицам, классическим атрибутом которых является угловой момент. Угловые моменты этих квазичастиц описывают траектории, фигурирующие в качестве характеристик волновых уравнений.

В качестве прототипа могут послужить квазичастицы, которые были введены при описании нелинейно-оптического магнитного резонанса на переходе атома, взаимодействующего с линейно-поляризованным светом [3].

Настоящее сообщение посвящено квантованию энергий квазичастиц, образуемых под действием световой волны эллиптической поляризации. Спектр полевого расщепления уровней дается спектром энергий квазичастиц, волновые функции которых удовлетворяют требованию цикличности при полных поворотах.

2. Рассмотрим дипольно разрешенный переход между уровнями с одинаковыми значениями полного углового момента ($J - J$ переход в атомах, Q-ветвь в молекулах). Представления дипольных операторов гамильтониана электродипольного взаимодействия и векторов состояний осуществим в базисе когерентных состояний группы вращения $SU(2)$:

$$|J\xi> = \sum_{M=-J}^{J} (C_{2J}^{J-M})^{1/2} \exp(iM\xi^*)|JM> . \tag{1}$$

Здесь C_{2J}^{J-M} – биномиальный коэффициент, $\xi^* = \phi + i \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ – комплексная координата в полосе $0 < \operatorname{Re}\xi < 2\pi$, определяемая азимутальным и полярным углами ϕ, θ на сфере направлений углового момента. Операторы дипольного момента по теореме Вигнера – Эккарта пропорциональны неприводимым тензорным операторам (НТО), которые для $J - J$ перехода совпадают с инфинитезимальными операторами группы вращений. В базисе (1) декартовые компоненты НТО суть

$$\hat{T}_z = i\partial_\xi , \quad \hat{T}_x = J\cos\xi - \sin\xi\,\partial_\xi, \quad \hat{T}_y = -J\sin\xi - \cos\xi\,\partial_\xi . \tag{2}$$

Систему координат ориентируем так, чтобы ось y совпадала с направлением распространения эллиптически поляризованной волны света, а ось z с большой полуосью эллипса поляризации. Стационарные уравнения Шредингера для волновых функций (ВФ) $\Psi(\xi) = {}< J\xi|\Psi>$ угловых движений состояний $|n>$ и $|m>$ резонансного перехода имеют вид

$$(E - \Omega)m(\xi) = (\hat{T}_z + ik\hat{T}_x)n(\xi),$$
$$(E + \Omega)n(\xi) = (\hat{T}_z - ik\hat{T}_x)m(\xi). \tag{3}$$

Здесь E и 2Ω – энергия состояний и расстройка частоты перехода от частоты света, отсчитываемые в единицах G_z, $k = G_x / G_z$ – коэффициент эллиптичности, изменяющийся от 0 до единицы, величины $G_{z(x)} = d_{mn}\,\mathcal{E}_{z(x)}\,[J(J+1)(2J+1)]^{-1/2}$, d_{mn} – приведенный матричный элемент перехода, $\mathcal{E}_{z(x)}$ – напряженность электрического поля световой волны.

3. Симметрия уравнений угловых движений относительно поворотов позволяет выделить класс волновых функций, отвечающих требованию цикличности, и найти спектр E полевого расщепления вырожденных по проекциям углового момента состояний перехода $m - n$. Важной симметрией уравнений является инвариантность к комбинированному преобразованию, состоящего из поворота R_y на угол π вокруг оси y (волнового вектора света) и одновременного изменения знака энергии E, Ω на $-E$, $-\Omega$. А R_y – инвариантностью обладает уравнение, которому подчиняется ВФ состояния $|m\rangle$ или $|n\rangle$:

$$(E^2 - \Omega^2)\; m(\xi) = (\hat{T}_z^2 + k^2 \hat{T}_x^2 + k \hat{T}_y)\, m(\xi). \tag{4}$$

Причина такой повышенной симметрии состоит в том, что уравнение (4) одновременно описывает два типа квазичастиц – с энергией E и $-E$, а преобразование R_y переводит ВФ одной квазичастицы в ВФ другой. Для собственных функций уравнения (4) инвариантность относительно поворота R_y позволяет ввести квантовое число $r = \pm 1$, являющееся собственным значением оператора R_y : $R_y \; m_E(\xi) = r\, m_E(\xi)$. Учитывая, что R_y действует по правилу $R_y\, m(\xi) = (-1)^J m(\pi - \xi)$, получим

$$(-1)^J m_E(\pi - \xi) = r\, m_E(\xi). \tag{5}$$

Условие (5) может быть выполнено только для вполне определенных дискретных значений энергий. Эти квантованные энергии квазичастиц можно найти решая на действительной оси уравнение (4)

$$(1 - k^2 \sin^2\xi)\, \partial_\xi^2 m + [(2J-1)\, k \sin\xi + 1]\, k \cos\xi\, \partial_\xi m + [\epsilon^2 - k^2 J^2 \times (\cos^2\xi + $$

$$+ J^{-1} \sin^2\xi) + kJ \sin\xi\,]\, m = 0, \qquad \epsilon^2 = E^2 - \Omega^2. \tag{6}$$

Спектр энергий квазичастиц легко получить в квазиклассическом пределе $J \gg 1$ с точностью $(\epsilon/J)^2 \sim 0\,(1/J)$, воспользовавшись приближенным уравнением

$$(1 - k^2 \sin^2\xi)\, \partial_\xi^2 m + 2Jk^2 \sin\xi \cos\xi\, \partial_\xi m + J^2 [(\epsilon/J)^2 - k^2 \cos^2\xi]\, m = 0. \tag{7}$$

В результате подстановки $m(\xi) = (1 - k^2 \sin^2 \xi)^{J/2} \mathcal{M}(\xi)$ уравнение (7) приводится к уравнению Шредингера вида

$$\partial_\xi^2 \mathcal{M} + J^2 p^2(\xi)\, \mathcal{M} = 0, \tag{8}$$

где $p^2(\xi) = [(\epsilon/J)^2 - 1]\, \dfrac{\delta - k^2 \sin^2\xi}{(1 - k^2 \sin^2\xi)^2}$, $\delta = \dfrac{(\epsilon/J)^2 - k^2}{(\epsilon/J)^2 - 1}$.

На функцию $\mathcal{M}(\xi)$ переносится условие (5). Периодичность потенциала уравнения (8) позволяет ограничиться нахождением решения в полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}\,\xi \leqslant \pi$. Два линейно независимых решения в квазиклассическом приближении записываются следующим образом

$$\mathcal{M}_\pm(\xi) = [J p(\xi)]^{-1/2} \exp\{\pm iJ \int_{\xi_p}^{\xi} d\eta\, p(\eta)\}, \tag{9}$$

где ξ_p координата точки поворота $p(\xi) = 0$.

Границы спектра энергий $0 \leqslant (\epsilon/J)^2 \leqslant 1$ даются классической оценкой гамильтониана уравнения (4). На действительной оси $\mathrm{Re}\,\xi = \phi$ в зависимости от величины $(\epsilon/J)^2$ и k^2 квазиклассический импульс $p(\xi)$ определяет классически разрешенные и запрещенные зоны угловых движений. Для энергий квазичастиц в верхнем секторе от k^2 до единицы классически разрешенными оказываются все азимутальные направления $(p^2(\xi) > 0$ в интервале $0 < \phi \leqslant 2\pi)$. Картина азимутальных движений квазичастиц в верхнем секторе отвечает надбарьерному отражению с двумя точками поворота на широтах $\theta_+ = \operatorname{arctg}\sqrt{-k^2/\delta}$ и $\pi - \theta_+$, которые лежат на мнимой оси $\operatorname{Im}\xi$, проходящей через точки с азимутом $\phi = 0, \pi$. Образуем из функций (9) общее решение и, удовлетворяя условие (5), получим условие квантования

$$J \int_0^\pi d\eta\, p(\eta) = \pi M, \tag{10}$$

где M – число узлов ВФ в полосе $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

В нижнем секторе $0 \leqslant (\epsilon/J)^2 < k^2$ на действительной оси лежат две точки поворота $\xi_0 = \arcsin\sqrt{\delta/k^2}$ и $\pi - \xi_0$. В зонах $0 \leqslant \xi < \xi_0$ и $\pi - \xi_0 < \xi < \pi$ имеет место подбарьерное классически запрещенное движение $(p^2(\xi) < 0)$, а в зоне $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi - \xi_0$ – движение в яме. Квантование азимутальных движений определяется ямой, размеры которой зависят от энергии квазичастиц $(\epsilon/J)^2$ и параметры эллиптичности света. Если поляризация света стремится к круговой $k \to 1$, то точка поворота ξ_0 стремится к $\pi/2$ и яма схлопывается, оставляя особенность квазиимпульса $p(\xi) \propto |\cos^{-1}\xi|$ в точке $\xi = \pi/2$. Сужение ямы одновременно сопроваждается ростом ее глубины таким образом, что критерий квазиклассичности действия S на траекториях между точками поворота не нарушается $(S \gg 1)$. Условие квантования траекторий имеет вид

$$J \int_{\xi_0}^{\pi - \xi_0} d\eta\, p(\eta) = \pi M, \tag{11}$$

в котором M– число узлов ВФ угловых движений в яме. В пределе $k = 1$ необходимо учесть узлы функции $\cos^J\xi$, связанные с подстановкой $m(\xi) = \cos^J\xi\, \mathcal{M}(\xi)$. Тогда условие (11) запишется следующим образом:

$$\lim_{k \to 1} \left\{ \int_{\xi_0}^{\pi - \xi_0} d\eta\, p(\eta) \right\} = \pi\,(1 + M/J). \tag{12}$$

Из асимптотических решений уравнения (7) при $|\xi| \to \infty$ следует, что максимальное число узлов M ВФ состояний с угловым моментом J ограничено величиной J.

В заключение приведем интересную аналогию между движением квазичастиц и вращением волчков. А именно, из уравнения (4) можно заключить, что квадрированный спектр ϵ^2 квазичастиц или спектр полевого расщепления совпадает со спектром асимметричного волчка, вращающегося в поле тяжести. Моменты инерции этого волчка и моменты сил тяжести имеют сугубо резонансную природу. Варьируя степень эллиптичности резонансного света можно формировать волчки с различной симметрией. Под действием света линейной и круговой поляризаций образуются аксиально-симметричные волчки. А эллиптически поляризованный свет формирует асимметричный волчок [2].

Считаю своим приятным долгом поблагодарить за ценное замечание Г.И.Сурдутовича, за полезные обсуждения А.В.Гайнера, С.Г.Раутиана.

Литература

1. *Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М.* Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. Новосибирск, Наука, 1979.

2. *Павличенков И.М.* ЯФ, 1981, **33**, 98.

3. *Раутиан С.Г., Рудавец А.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1982, **35**, 309.

4. *Заславский Г.М., Мейтлис В.П., Филоненко Н.Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск, Наука, 1982.

Институт автоматики
и электрометрии
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
10 января 1983 г.