РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 60, ВЫПУСК 4*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *25 АВГУСТА, 1994*

Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.4, стр.225 - 229

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

В.Д.Иващук, А.А.Кириллов[†]*, В.Н.Мельников*

Научно-исследовательский центр по изучению свойств поверхности и вакуума
117331 Москва, Россия

[†]*Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики*
603005 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 3 июня 1994 г.

Показано, что наряду с хорошо известным примером Бианки-IX (mixmaster universe) [1], свойством стохастичности обладает также и широкий класс многомерных космологических моделей. Предложен критерий наличия стохастического поведения для различных моделей.

1. Как известно, однородная космологическая модель Бианки-IX вблизи сингулярности обладает хаотическим поведением [1]. Важность этой модели для космологии обусловлена в первую очередь тем фактом, что ее поведение является прототипом поведения общего решения уравнений Эйнштейна вблизи особой точки [2]. Действительно, как показано в [3], в окрестности сингулярности действие для произвольного гравитационного поля распадается на сумму независимых членов, каждый из которых представляет собой действие для однородной модели. При этом хаотичность динамики приводит к возбуждению неоднородностей все более и более малых координатных масштабов и в конечном счете определяет их статистические свойства [3, 4].

В то же время несомненный интерес вызывает возможность обобщения этих результатов на случай многомерной космологии [5, 6], указание на существование которой следует из различных теорий объединения [7], для которых стандартная эйнштейновская теория тяготения является лишь низкоэнергетическим пределом. При этом очевидно, что дополнительные измерения (если они существуют) должны наиболее сильно проявлять себя в экстремальных условиях – вблизи особой точки.

Первое указание на наличие спонтанной стохастизации в многомерных моделях получено в [8], где показано, что в случае $D=5$ (D – размерность пространства-времени), так же как и в Бианки-IX, имеет место колебательный режим приближения к особенности. Отметим также, что вопрос о хаотичности поведения различных многомерных моделей уже неоднократно подвергался исследованию различными методами [9]. В настоящей работе показано, что вблизи особой точки хаотичность поведения является общим свойством для широкого класса многомерных космологических моделей.

2. Рассмотрим однородную космологическую модель с пространственной размерностью $n+1$. Метрика такой модели имеет вид

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \sum_{a=0}^{n} e^{q^a} \sigma^a_\alpha \sigma^a_\beta dx^\alpha dx^\beta, \tag{1}$$

где $\sigma^a = \sigma^a_\alpha dx^\alpha$ - заданные однородные базисные формы, подчиняющиеся уравнениям структуры

$$d\sigma^a = \frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c, \tag{2}$$

где C^a_{bc} - структурные константы некоторой полупростой алгебры Ли. Действие для этой модели в планковских единицах имеет вид

$$I = \int \left\{ \; p_a \tfrac{dz^a}{dt} - \lambda C(p, z) \; \right\} dt, \tag{3}$$

где переменные z^a связаны с масштабными функциями линейным преобразованием $z^a = A^a_b q^b$ с постоянными коэффициентами A^a_b [5], λ - множитель Лагранжа, связанный с функцией хода N соотношением $\lambda = N \exp(-\frac{1}{2} \sum q^a)$, а гамильтонова связь имеет вид

$$C = \eta^{ab} p_a p_b + V(z), \tag{4}$$

здесь $\eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots 1)$ – метрика минисуперпространства M^{n+1}, а потенциал в (4) имеет структуру

$$V(z) = \sum_{i=1}^{m} r_i \exp(u^i_a z^a). \tag{5}$$

Величины r_i и u^i_a суть постоянные, определяемые по структурным константам C^a_{bc} и матрице A^a_b. К подобным потенциалам приводят также космологические модели с многокомпонентной идеальной жидкостью [6] (при этом r_i и u^i_a произвольны.)

Рассмотрим следующую систему суперпространственных координат (аналог координат Мизнера-Читра [10, 11]):

$$z^0 = -e^{-\tau} \frac{1+y^2}{1-y^2}, \quad \mathbf{z} = -2e^{-\tau} \frac{\mathbf{y}}{1-y^2}, \qquad y = \mid \mathbf{y} \mid < 1. \tag{6}$$

Эта система координат ограничивает динамическую систему (3) на нижний "световой" конус $\mathcal{V}_- = \{z = (z^0, \mathbf{z}) \mid z^0 < - \mid \mathbf{z} \mid\}$. В новых координатах действие (3) принимает вид

$$I = \int \left\{ \; \pi_k \tfrac{dy^k}{dt} - h \tfrac{d\tau}{dt} - \overline{\lambda} \{\epsilon^2(y, \pi) + U(y, \tau) - h^2\} \; \right\} dt, \tag{7}$$

где $U = e^{-2\tau}V$, $\epsilon^2 = \frac{1}{4}(1-y^2)^2\pi^2$, $\overline{\lambda} = \lambda e^{2\tau}$. Разрешая уравнение гамильтоновой связи $C = 0$ относительно h, действие (7) можно привести к эквивалентной АДМ формулировке

$$I = \int \{\pi_k \frac{dy^k}{d\tau} - h(\pi, \tau, y)\} d\tau, \tag{8}$$

при этом τ играет роль времени (что соответствует выбору калибровки $\overline{\lambda} = \frac{1}{2h}$), а величина $h = \sqrt{\epsilon^2 + U}$ – роль АДМ гамильтониана.

Редуцированное конфигурационное пространство (то есть "пространственная" часть минисупёрпространства M^{n+1}) представляет собой n-мерный шар $D^n = \{\mathrm{y} \in R^n \mid\mid \mathrm{y} \mid < 1\}$, который вместе с метрикой $\gamma_{kl} = \frac{4\delta_{kl}}{(1-y^2)^2}$, задаваемой кинетическим членом ϵ^2 в h, является одной из реализаций n-мерного пространства Лобачевского H^n.

3. Рассмотрим теперь асимптотику $\tau \to -\infty$, которая при $z \in \mathcal{V}_-$ соответствует $z^0 \to -\infty$, то есть особой точке в метрике (1). В этой асимптотике каждая экспонента в U (см.(5)), удовлетворяющая условиям

$$(u^i)^2 = (\mathrm{u}^i)^2 - (u_0^i)^2 > 0 \Rightarrow r_i > 0; \qquad u_0^i > 0, \tag{9}$$

имеет форму потенциальной стенки

$$r_i \exp\{-2\tau + u_a^i z^a(y, \tau)\} \to \theta_\infty[A_i(y)], \tag{10}$$

где

$$\theta_\infty[x] = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \tag{11}$$

а выражение

$$A_i(y) = -(\mathrm{y} + \frac{\mathrm{u}^i}{u_0^i})^2 + (\frac{\mathrm{u}^i}{u_0^i})^2 - 1 = 0 \tag{12}$$

задает положение стенки.

Отметим, что условия (9) удовлетворяются для широкого класса моделей с идеальной жидкостью [6], а также для ряда однородных моделей. Обозначим Δ_+ множество всех членов суммы (5) в потенциале U, удовлетворяющих условию (9). Тогда асимптотическое выражение для потенциала будет иметь вид

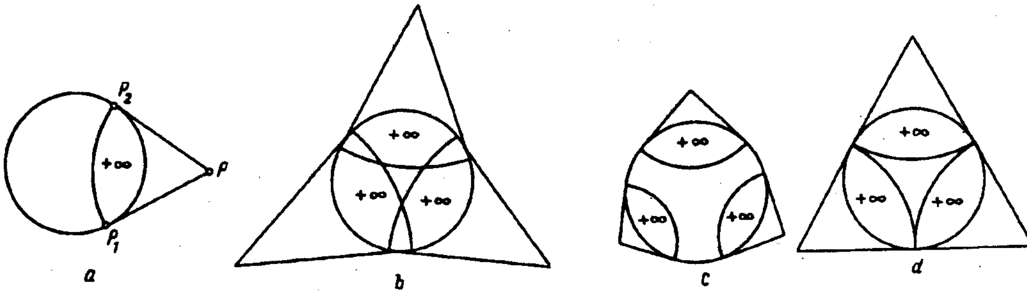
$$V_\infty(y) = \sum_{i \in \Delta_+} \theta_\infty[A_i(y)]. \tag{13}$$

Таким образом, динамическая система (8) вблизи особой точки сводится к биллиарду на пространстве Лобачевского H^n. Границу биллиарда образует система шаров D_i^n, $i \in \Delta_+$ (12). В качестве критерия хаотичности биллиарда выступает конечность его объема [12], при этом инвариантная мера, к которой релаксирует произвольное начальное распределение, дается выражением

$$d\mu(y, s) = \mathrm{const} \frac{d^n y d^{n-1} s}{(1-y^2)^n},$$

где s - единичный вектор скорости.

Оказывается, что критерий конечности объема биллиарда можно сформулировать в терминах задачи об освещении сферы [13]. Другими словами, если точечные источники в R^n, помещенные в точки $\mathrm{V}^i = -\mathrm{u}^i/u_0^i$, целиком освещают сферу S^{n-1} единичного радиуса с центром в начале координат, то объем биллиарда оказывается конечным. Тогда биллиард является хаотическим и обладает свойством перемешивания [14] (при этом показатель Ляпунова определяется как квадратный корень из модуля кривизны пространства Лобачевского). Отметим, что в силу условий (9) имеем $|\mathbf{V}^i| > 1$, то есть точечные источники располагаются вне освещаемой сферы, а минимальное число источников, необходимое для полного освещения сферы, равно размерности минисуперпространства (то есть $n+1$ [13]).



Различные биллиардные конфигурации на плоскости Лобачевского ($n = 2$): a – $m_+ = 1$; b – $m_+ = 3$, биллиард компактный; c – $m_+ = 3$, биллиард имеет бесконечный объем; d – $m_+ = 3$, биллиард некомпактный с конечным объемом (Bianchi-IX)

Рассмотрим простейшие примеры. Обозначим m_+ число шаров (12), образующих границу биллиарда (для простоты иллюстрации будем везде полагать $n = 2$). Пусть $m_+ = 1$. Тогда имеет место биллиард, изображенный на рисунке a. Его граница (потенциальная стенка) образуется дугой окружности с центром в точке $P = \mathbf{V} = -\mathbf{u}/u_0$ и радиусом $P_2P = (V^2 - 1)^{1/2}$. При этом точки абсолюта, $|\mathbf{y}| = 1$, недоступные для траекторий динамической системы, это те, которые лежат на дуге P_1P_2, освещаемой точкой P.

Пусть $m_+ > 1$. Тогда возможны ситуации, изображенные на рисунке b, c, d (для $m_+ = 3$). В случаях рисунка b, d объем биллиарда конечен (хотя в последнем случае биллиард является несобственным, то есть для траекторий доступны лежащие на абсолюте точки). В случае рисунка c объем бесконечен и, следовательно, биллиард не является перемешивающим.

Таким образом, для космологической модели (1) хаотическое поведение вблизи сингулярности возможно лишь в случае, когда число экспонент в потенциале с положительным квадратом векторов u_a^i (9) не меньше, чем размерность минисуперпространства. Модели Бианки-IX соответствуют значения $n = 2$, $m = 6$, $m_+ = 3$ (при этом три показателя в экпоненте имеют нулевой квадрат и не создают потенциальных стенок). Биллиард имеет вид изображенный на рисунке d [10]. Объем биллиарда конечен (то есть биллиард является перемешивающим). Траекториями служат геодезические линии плоскости Лобачевского. Движению по геодезической соответствует так называемый казнеровский режим эволюции метрики [1]. Смене казнеровских режимов (казнеровских эпох) соответствует отражение от стенок биллиарда.

В заключение отметим, что описание квантовой динамики рассматриваемых моделей может быть легко достигнуто подобно тому, как это было сделано в [15] для модели Бианки-IX.

---

1. В.А.Белинский, Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, УФН **102**, 463 (1970); Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, М.Ханин и др., Письма в ЖЭТФ **38**, 79 (1983).
2. V.A.Belinskii, E.M.Lifshitz and I.M.Khalatnikov, Adv. Phys. **31**, 639 (1982); ЖЭТФ **62**, 1606 (1972).
3. А.А.Кириллов, ЖЭТФ **76**, 705 (1993).
4. А.А.Кириллов, А.А.Кочнев, Письма в ЖЭТФ **46**, 345 (1987).
5. В.Н.Мельников, Итоги науки и техники. Классич. теор. поля и теор. гравитации. Т.1. Гравитация и космология, М.: ВИНИТИ, 1991, с. 49; В.Д.Иващук, В.Н.Мельников, ТМФ **98**, 312 (1994).
6. V.D.Ivashchuk and V.N.Melnikov, Int. J. Mod. Phys., D (1994), in press.
7. М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн, М.: Мир, 1990.
8. В.А.Белинский, И.М.Халатников, ЖЭТФ **63**, 1121 (1972).
9. M.Szydlowski, J.Szczesny, and M.Biesiada, GRG **19**, 1118 (1987); M.Szydlowski and G.Pajdosz, Class. Quant. Grav. **6**, 1391 (1989);
J.Demaret, Y.de Rop, and M.Henneaux, Int. J. Theor. Phys. **28**, 250 (1989); J.Demaret, J.Hanquin, M.Henneaux et al., Phys. Lett. **B175**, 129 (1986).
10. J.Pullin, Syracuz. Univ. preprint, Su-GP-91/1-4, 1991.
11. Ч.В.Мизнер, К.С.Торн, Дж.А.Уилер, Гравитация, **2**, М.: Мир, 1977.
12. Д.В.Аносов, Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны, Труды МИАН им. Стеклова, М.: 1967.
13. В.Г.Болтянский, И.Ц.Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М.: Наука, 1965.
14. И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
15. А.А.Кириллов, Письма в ЖЭТФ **55**, 561 (1992); Int. Journ. Mod. Phys. **D 3**, 1 (1994).