Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.4, стр.247 - 251

О ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

П.Л.Ваньян

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН

117851 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 апреля 1994 г.

После переработки 20 июня 1994 г.

Предложено теоретическое объяснение экспериментально наблюдаемой зависимости фрактальной размерности турбулентности от числа Рейнольдса течения R. Показатель структурной функции первого порядка сравнивается с экспериментом в широком диапазоне R.

Пространственная перемежаемость является фундаментальным свойством мелкомасштабной турбулентности [1]. Для развитых турбулентных течений (при $R \gg 1$) предложен ряд теоретических моделей перемежаемости (см., например, обзор в [2]). Результаты экспериментов [3,4] свидетельствуют, что и при относительно небольших R в характеристиках мелкомасштабной турбулентности наблюдается скейлинг с зависящими от R показателями. Целью настоящей работы является теоретическое объяснение эксперимента [3,4] на основе феноменологической модели [5–7].

На основе полуэмпирической модели [5] для функции моментов скорости диссипации энергии ϵ в равновесной турбулентности выведено уравнение

$$\Phi'' + 2(\lambda_1 + \lambda_2 q)\Phi' + \lambda_3 q(q-1) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(q,x) = <\epsilon^q> / <\epsilon>^q$, штрихом обозначено дифференцирование по x, x – логарифм турбулентного числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = k^2/(<\epsilon>\nu)$, k – средняя энергия турбулентности, ν – вязкость.

Более строгий вывод уравнения (1) предложен в [7]. В этой работе показано, что аналогичное уравнение может быть получено в результате разделения "быстрых" и "медленных" переменных в кинетическом уравнении для плотности распределения диссипации в произвольной, в общем неравновесной, турбулентности. В последнем случае x будет логарифмом некоторого эффективного числа Рейнольдса.

Для коэффициента дробления поля диссипации $e_{r,l} = \epsilon_r/\epsilon_l$ из гипотезы о независимости последовательных дроблений следует [8]

$$<(e_{r,l})^q> = (l/r)^{\mu_q} \quad \text{при } \eta \ll r, l \ll L, \tag{2}$$

где ϵ_r – диссипация, усредненная по области с характерным размером r, $\eta = <\epsilon>^{-1/4}\nu^{3/4}$ – внутренний, $L = k^{3/2}/<\epsilon>$ – внешний масштабы турбулентности. Если в интервале масштабного подобия распределение $e_{r,l}$ не зависит ни от L, ни от η, то μ_q – универсальная функция q. В известных моделях перемежаемости (см. [2]) такая гипотеза основывается на рассмотрении асимптотически больших чисел Рейнольдса. Более общим будет предположение о том, что при независимости дроблений распределение $e_{r,l}$ может зависеть от отношения масштабов η и L, то есть от Re.

Если показатели μ_q от Re не зависят, то коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3 – универсальные постоянные [6], обратное утверждение, в общем, неверно. Предположим, что λ_1 λ_2 и λ_3 постоянны, тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(q,x) = C_1(q)\exp\{[-(\lambda_1+\lambda_2 q) - \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2 q)^2 - \lambda_3 q(q-1)}](x-x_0)\}+$$

$$+C_2(q)\exp\{[-(\lambda_1+\lambda_2 q) + \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2 q)^2 - \lambda_3 q(q-1)}](x-x_0)\}, \qquad (3)$$

параметр x_0 введен для упрощения последующих формул.

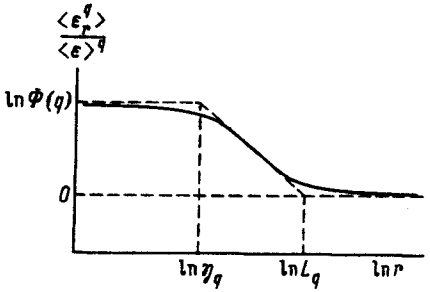

Рис.1

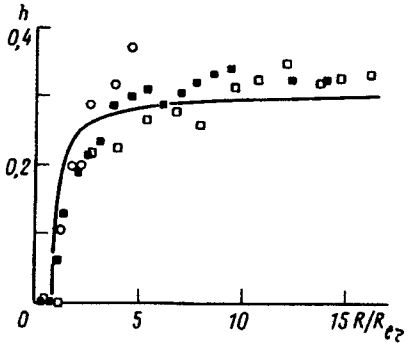

Рис.2

Рис.1. Зависимость вероятностного момента частично усредненной диссипации ϵ_r от масштаба r

Рис.2. Зависимость степенного показателя структурной функции первого порядка от числа Рейнольдса. □, ■ – течение в трубе и за решеткой [3], ○ – след за цилиндром [4], сплошная кривая по формуле (10). $\lambda_1 = -3,5$, $\gamma = 0,15$

В интервале масштабного подобия $<\epsilon_r^q>/<\epsilon>^q = \kappa r^{\mu_q}$, где κ и μ_q не зависят от r. При $r\to\infty$, очевидно, $<\epsilon_r^q>/<\epsilon>^q \to 1$, а при $r\to 0$, $<\epsilon_r^q>/<\epsilon>^q \to \Phi(q,x)$. На рис.1 представлено схематическое изображение зависимости момента порядка q (для $q>1$) от r. Определим L_q и η_q для некоторого фиксированного q с помощью соотношений $\kappa(L_q)^{-\mu_q} = 1$, $\kappa(\eta_q)^{-\mu_q} = \Phi(q,x)$. Тогда

$$(L_q/\eta_q)^{\mu_q} = \Phi(q,x). \qquad (4)$$

По порядку величины параметры L_q и η_q совпадают, соответственно, с масштабами L и η. Полагая $L_q = a(q)L$, $\eta_q = b(q)\eta$, где $a(q)$ и $b(q)$ – универсальные функции q, из (4) получим

$$(g(q)\exp\{\frac{3}{4}x\})^{\mu_q} = \Phi(q,x), \qquad (5)$$

где $g(q) = a(q)/b(q)$.

Если дробления независимы при любом отношении l/r, то распределение логарифма $e_{r,l}$ будет безгранично делимым [9], то есть распределением величины, представимой в виде суммы произвольного числа независимых одинаково распределенных слагаемых. Если коэффициент $C_2(q)$ при некотором q не равен нулю, главным членом при $x\to\infty$ решения (3) будет второе слагаемое. Из свойств преобразования Лапласа безгранично делимых распределений [9]

можно показать [6], что это решение не обеспечивает неотрицательности плотности распределения, следовательно, $C_2(q) \equiv 0$. Подставляя (3) в уравнение (5) и опуская индекс при коэффициенте $C_1(q)$, получим

$$\mu_q = \frac{\ln(C(q)) + [-(\lambda_1 + \lambda_2 q) - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 q)^2 - \lambda_3 q(q-1)}](x - x_0)}{\ln(g(q)) + \frac{3}{4}x}. \tag{6}$$

При $x \to \infty$

$$\mu_q \to \frac{4}{3}[-(\lambda_1 + \lambda_2 q) - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 q)^2 - \lambda_3 q(q-1)}],$$

а распределение коэффициента дробления диссипации приближается к универсальному распределению, найденному в [6]. Если $\lambda_2^2 \neq \lambda_3$, то плотность предельного распределения должна содержать δ-функцию [6], что противоречит эксперименту [10]. Для того чтобы, в согласии с экспериментом [10], плотность предельного распределения не обращалась в нуль при $0 < e_{r,l} < l/r$, необходимо, чтобы $\lambda_2 = -3/4$ [6], отсюда $\lambda_3 = 9/16$.

В экспериментах [3,4] найдено, что размерность турбулентности меняется от 2 при некотором критическом значении числа Рейнольдса R_{cr} до близкой к 3 при больших R. Модель [5,7], как и классическая теория [11], предполагалась относящейся к развитой турбулентности. Предположим, что уравнение (1) справедливо и при малых R, близких к R_{cr}.

Спектр обобщенных размерностей D_q определяется по формуле $D_q = 3 + \mu_q/(1-q)$ [12]. Если при R_{cr} диссипация сосредоточена на однородном фрактале с размерностью 2, то есть $D_q = 2$ при произвольном $q > 0$, то $\mu_q = q - 1$. Тогда $\ln(C(q)) = (q-1)(\ln(g(q)) + \frac{3}{4}x_0)$, где x_0 – логарифм критического числа Рейнольдса. Отсюда

$$\mu_q = q - 1 + \frac{-4\lambda_1 + 3 - \sqrt{(4\lambda_1 - 3q)^2 - 9q(q-1)}}{4\ln(g(q)) + 3x}(x - x_0). \tag{7}$$

Из нормировочного условия $\mu_0 = 0$ получаем $\ln(g(0)) = -\frac{3}{4}x_0$.

Если δu_r – разность скорости в точках на расстоянии r (r принадлежит интервалу масштабной инвариантности), то

$$< \delta u_r > \propto r^{\zeta_1} \propto r^h r^{(3 - D_{1/3})}, \tag{8}$$

где h – скейлинговый показатель структурный функции первого порядка по "активной" турбулентной области. Метод измерений в эксперименте [3] позволил определять h впрямую, в [4] находилась размерность поверхности раздела, которая интерпретирована в терминах показателя h в [13]. Объяснение эксперименту [3] на основе однородной β-модели [14] с зависящей от R фрактальной размерностью D предложено в [15]. Для β-модели $h = (D-2)/3$. В общем случае мульти-скейлинговой зависимости моментов диссипации $h = (D_{1/3} - 2)/3$. Полагая $\gamma = \ln(g(1/3)/g(0))$, из (7) получим

$$h = \frac{-4\lambda_1 + 3 - \sqrt{(4\lambda_1 - 1)^2 + 2}}{8\gamma + 6(x - x_0)}(x - x_0). \tag{9}$$

Турбулентное число Рейнольдса Re пропорционально R, тогда

$$h = \frac{-4\lambda_1 + 3 - \sqrt{(4\lambda_1 - 1)^2 + 2}}{8\gamma + 6\ln(R/R_{cr})}\ln(R/R_{cr}). \tag{10}$$

На рис.2 представлены экспериментальные значения h для течения в трубе ($R_{cr} = 2160$) и за решеткой ($R_{cr} = 263$) [3], в следе за цилиндром ($R_{cr} = 165$) [4], а также теоретическая зависимость по формуле (10). Для параметра λ_1 выбрано значение -3,5, найденное в [6] и позволяющее удовлетворительно аппроксимировать плотности распределения коэффициента дробления диссипации в независимом эксперименте [10]. Вариацией единственного свободного параметра γ найдено его наилучшее (на глаз) значение $\gamma = 0,15$. Неплохое согласие теоретической кривой с экспериментом свидетельствует в пользу возможности применения модели [5–7] и при относительно малых значениях числа Рейнольдса течения.

В работе исследована зависимость скейлинговых показателей моментов диссипации от числа Рейнольдса. Универсальная модель распределения коэффициента дробления [6] приводит к завышению степенных показателей ζ_n структурных функций старших порядков [7]. Показатели ζ_n, найденные в различных экспериментах (как физических, так и численных), систематически расходятся между собой. Из свободного графика в работе [16] более правдоподобным представляется существование не универсальной зависимости ζ_n как функции n, а семейства $\zeta_n(R)$. В последующей работе будет показано хорошее согласие степенных показателей структурных функций, найденных на основе рассматриваемой модели, с экспериментом.

Можно показать, что и без гипотезы о постоянстве коэффициентов $\lambda_{1,2,3}$ физический интерес представляет только одно из двух фундаментальных решений уравнения (1). Для согласия с экспериментом [10] необходимо положить $\lambda_2 = -3/4$, $\lambda_3 = 9/16$, в то время как коэффициент λ_1 может зависеть от числа Рейнольдса. Если при $\mathrm{Re} \to \infty$ коэффициент $\lambda_1 \to \infty$, то распределение диссипации в инерционном интервале асимптотически приближается к предсказанному теорией А.Н.Колмогорова [11] с $h = 1/3$. Вопрос о том, имеет ли размерность турбулентности асимптотическое значение 3 или близкое, но отличающееся от него значение, представляет большой теоретический интерес.

Необходимо отметить, что интерпретация измерений [3] поставлена под сомнение в [17]. В этой работе найдено, что показатели ζ_n универсальны в широком диапазоне чисел Рейнольдса, а при малых R они не могут быть определены из-за отсутствия инерционного интервала. Утверждается, что зависимость h от R [3] связана с неправильным выбором границ инерционного интервала. Можно предложить следующее объяснение расхождения результатов работ [3,4] и [16]. Из рис.1 видно, что при любых конечных R скейлинг является некоторым приближением, а "линейный" участок (в логарифмических координатах) является отрезком касательной к кривой в точке перегиба. При уменьшении R диапазон масштабов, с заданной точностью аппроксимируемый касательной, уменьшается, но угол наклона ее, задающий μ_q может быть определен и при малых R. Слабая логарифмическая зависимость $h(R)$ при больших R может скрадываться погрешностями измерений.

Подчеркнем, что возможность применения идей теории локально-изотропной турбулентности к течениям при относительно малых R является дискуссионной и требует дальнейшего, прежде всего экспериментального, исследования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ISF, грант MEV000.

---

1. А.С.Монин, А.М.Яглом, Статистическая гидродинамика, ч.2, М.: Наука, 1967.
2. C.Meneveau and K.R.Sreenivasan, J.Fluid Mech. **224**, 429 (1991).
3. P.Tong and W.I. Goldburg, Phys. Fluids **31**, 2841 (1988).
4. R.R.Prasad and K.R.Sreenivasan, Phys. Fluids **A2**, 792 (1990).
5. П.Л.Ваньян, ЖЭТФ **102**, 90 (1992).
6. П.Л.Ваньян, Письма в ЖЭТФ. **58**, 407 (1993).
7. П.Л.Ваньян, в печати.
8. Е.А.Новиков, Прикл. мат. и мех. **35**, 266 (1971).
9. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2, М.: Мир, 1984. (W.Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. II, Wiley, 1971).
10. A.B.Chhabra and K.R.Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **68**, 2762 (1982).
11. А.Н.Колмогоров, ДАН СССР, **30**, 299 (1941).
12. H.G.E.Hentschel and I. Procaccia, Physica D**8**, 435 (1983).
13. P.Constantin, I. Procaccia and K.R.Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **67**, 1739 (1991).
14. U.Frish, P.L.Sulem, and M.Nelkin, J.Fluid Mech. **87**, 719 (1978).
15. G.Huber and P.Alstrom, J. Phys. A: Math. Gen **24**, L1105 (1991).
16. F.Anselmet, Y.Gagne, E.J.Hopfinger and R.A.Antonia, J. Fluid Mech. **140**, 63 (1984).
17. C.Baudet, S.Ciliberto and P.N.Tien, J. Phys. II (France) **3**, 293 (1993).