Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.4, стр.252 - 257 © 1994г. 25 августа

СПЕКТР ЗБГ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д.А. Самарченко

Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 1993 г.
После переработки 17 июня 1994 г.

Исследован заряженный бозе-газ (ЗБГ) в квантующем магнитном поле ниже критической температуры Бозе-конденсации $T_{c2}(H)$. В этом случае бозе-конденсат образовывает вихревую решетку. В таком периодическом потенциале поперечное движение частицы становится неограниченным из-за трансляционной инвариантности решетки, в результате чего спектр возбуждений носит зонный характер и определяется двумерным квазиимпульсом в перпендикулярной плоскости. Найдена функция Грина ЗБГ с учетом вихревой периодической структуры бозе-конденсата. Для квадратной вихревой решетки получен спектр возбуждений бозе-газа.

В последнее время в связи с открытием сверхпроводимости в металлооксидных соединениях вновь вызывает интерес теория заряженного бозе-газа (ЗБГ). В основе ряда теорий, претендующих на описание свойств металлооксидов, лежит представление о локальных парах. Не вдаваясь в подробности механизма формирования локальных пар в этих соединениях, отметим лишь биполяронную теорию [1], в рамках которой сильное электрон-фононное взаимодействие приводит к образованию биполяронов малого радиуса. Как было показано в работе [2], в пределе малой плотности частиц система локальных пар представляет собой заряженный бозе-газ.

Ранее в работе [3] были вычислены нижнее критическое H_{c1} и термодинамическое H_c магнитные поля и показано, что в промежуточном магнитном поле ($H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$) заряженный бозе-газ находится в смешанном состоянии. Как было отмечено в [2] для ЗБГ, воздействие внешнего магнитного поля приводит к квантованию поперечного движения бозонов. При значении магнитного поля $H \leq H_{c2}$ на нижнем энергетическом уровне, соответствующем нулевому уровню Ландау и нулевой проекции импульса в направлении магнитного поля, накапливается макроскопическое число частиц. В этом случае основной вклад вносят бозоны, находящиеся на одном (нижнем) уровне Ландау (ультраквантовый предел). Отметим, что в заряженном ферми-газе квантование Ландау может также играть существенную роль в формировании сверхпроводящего состояния [4].

Целью этой статьи является нахождение спектра возбуждений ЗБГ в смешанном состоянии. В области полей $H \sim H_{c2} \gg H_{c1}$ бозе-конденсат образует вихревую решетку, на которую приходится целое число квантов магнитного потока M. В этом случае каждый уровень Ландау расщепляется на M подзон [5]. Для упрощения интерпретации полученных результатов будет рассмотрена модель ЗБГ с короткодействующим потенциалом взаимодействия, вытекающая из теории биполяронов малого радиуса в пределе малой плотности носителей.

Для нахождения спектра возбуждений ЗБГ в магнитном поле ниже критической температуры T_{c2} обобщим диаграммную технику [6] на случай неоднородного бозе-конденсата. В области полей $H \sim H_{c2} \gg H_{c1}$ конденсатная волновая функция $\xi_0(\mathbf{r})$ ищется в виде

$$\xi_0(\mathbf{r}) = \exp(i\frac{xy}{2l^2})\sum_m C_m \exp(-i\frac{ma_x y}{Ml^2})\exp\left(-\frac{(x-ma_x/M)^2}{2l^2}\right), \qquad (1)$$

где $C_{m+M} = C_m$, $C_m = C_0$ для квадратной решетки, $C_m = C_0 e^{i\theta_m}$, $\theta_m = \frac{\pi m^2}{2}$ для треугольной решетки.

Гриновская функция бозонов в магнитном поле определяется системой уравнений

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = G^0(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}';i\omega_n)\Sigma^{11}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1;i\omega_n)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2;i\omega_n) + \qquad (2)$$

$$+\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}';i\omega_n)\Sigma^{20}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1;i\omega_n)F(\mathbf{r},\mathbf{r}_2;i\omega_n),$$

$$F(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^0(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1;i\omega_n)\Sigma^{11}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;i\omega_n)F(\mathbf{r},\mathbf{r}_2;i\omega_n) + \qquad (3)$$

$$+\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^0(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1;i\omega_n)\Sigma^{02}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;i\omega_n)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2;i\omega_n),$$

где $G^0(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n)$ определяется из уравнения

$$\left(i\omega_n - \frac{1}{2m}\left(i\hbar\nabla_r + \frac{2e\mathbf{A}(\mathbf{r})}{c}\right)^2\right)G^0(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (4)$$

Заряд бозонов считается равным $2e$.

Как было показано в [3], ЗБГ является сверхпроводником II рода с большим коэффициентом Гинзбурга–Ландау κ. Тогда в области полей $H \gg H_{c1}$ неоднородность $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$, определяемая глубиной проникновения λ, мала по сравнению с расстоянием между вихрями и ларморовским радиусом $l^2 = \frac{1}{2eH}$, так что поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в уравнениях (2), (3) можно считать постоянным. В дальнейшем все расчеты будем вести в единицах $\hbar = c = k_b = 1$. Функции Грина F и G, а также конденсатная волновая функция ξ_0 при трансляции на произвольный постоянный вектор $\mathbf{a}$ преобразуются следующим образом

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \exp(i2e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{A}(\mathbf{a}))G(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{r}'+\mathbf{a};i\omega_n), \qquad (5)$$

$$F(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \exp(i2e(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\mathbf{A}(\mathbf{a}))F(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{r}'+\mathbf{a};i\omega_n), \qquad (6)$$

$$\xi_0(\mathbf{r}) = \exp(i2e\mathbf{r}\mathbf{A}(\mathbf{a}))\xi_0(\mathbf{r}+\mathbf{a}). \qquad (7)$$

Выберем векторный потенциал в виде $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}\times\mathbf{r}/2$, $\mathbf{H} = (0,0,H)$, и, так же как и в работе [4], будем использовать представление , в котором x-координата центра ларморовских орбит является квантовым числом:

$$\chi_{LX,p_z}(\mathbf{r}) = \exp(\frac{ixy}{2l^2})\frac{\exp\left(i(-Xy/l^2 + p_z z)\right)}{\sqrt[4]{\pi l^2}\sqrt{2^L L!}}\exp\left(-\frac{(x-X)^2}{2l^2}\right)H_L\left(\frac{(x-X)}{l}\right), \qquad (8)$$

где X — x-координата центра орбиты, L - номер уровня Ландау, $H_L(x)$ - полином Эрмита. Собственное значение энергии

$$\varepsilon_{L,p_z} = (L+1/2)\frac{2eH}{m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

Частица, находящаяся в периодическом потенциале, образованным вихревой решеткой бозе-конденсата (1), может рассеяться только в состояние, отличающееся от первоначального на вектор обратной решетки. Поскольку x-координата центра орбиты X соответствует импульсу в y-направлении, то изменение импульса $\Delta X = 2\pi m l^2/a_y$, где m – целое. Поэтому в представлении (8) функция G зависит только от комбинации $X_1 = X + \pi m l^2/a_y$ и $X_2 = X - \pi m l^2/a_y$.

Что касается аномальной функции Грина F, то она отлична от нуля только в случае, если центры орбит бозонов удовлетворяют условию интерференции Ааронова–Бома $X_1 = \frac{ma_x}{2M} + X$ и $X_2 = \frac{ma_x}{2M} - X$. Построенные таким образом функции Грина G и F удовлетворяют условиям периодичности (5) и (6). Используя соотношение $a_x/M = 2\pi l^2/a_y$, разложим G и F по собственным функциям (8):

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \sum_{L_1,L_2}\sum_{m}\int \frac{dX}{2\pi l^2}\chi_{L_1,X+ma_x/2M}(\mathbf{r})\chi^*_{L_2,X-ma_x/2M}(\mathbf{r}')G_{L_1,L_2}(X,m;i\omega_n) \quad (9)$$

$$F(\mathbf{r},\mathbf{r}';i\omega_n) = \sum_{L_1,L_2}\sum_{m}\int \frac{dX}{2\pi l^2}\chi_{L_1,ma_x/2M+X}(\mathbf{r})\chi_{L_2,ma_x/2M-X}(\mathbf{r}')F_{L_1,L_2}(m,X;i\omega_n).$$

Для упрощения записи у G и F не указана переменная p_z. Из условия квазипериодичности (5) и (6) следует, что

$$F_{L_1,L_2}(m+2M,X;i\omega_n) = F_{L_1,L_2}(m,X;i\omega_n) \quad (10)$$

и

$$G_{L_1,L_2}(X+a_x,m;i\omega_n) = G_{L_1,L_2}(X,m;i\omega_n)$$

Кроме того, для функций Грина G и F в магнитном поле имеют место следующие соотношения:

$$G_{L_1,L_2}(X,m;i\omega_n) = G^*_{L_1,L_2}(X,-m;i\omega_n)$$

$$F_{L_1,L_2}(m,X;i\omega_n) = F_{L_1,L_2}(m,-X;i\omega_n)$$

Величина M и отношение a_x/a_y определяются геометрией решетки. Для квадратной и треугольной решеток $M=1$, $M=2$, соответственно.

Запишем уравнения (2) и (3) в представлении (9):

$$G_{L_1,L_2}(X,m;i\omega_n) = G^0_{L_1}(i\omega_n)\delta_{L_1,L_2}\delta_{m,0} + \quad (11)$$

$$+G^0_{L_1}(i\omega_n)\sum_{L'}\sum_{m'}\Big(\Sigma^{11}_{L_1,L'}(X-\frac{a_x}{2M}m',m-m';i\omega_n)G_{L',L_2}(X+\frac{a_x}{2M}(m-m'),m';i\omega_n)+$$

$$\Sigma^{20}_{L_1,L'}(m-m',X-\frac{a_x}{2M}m';i\omega_n)F_{L',L_2}(m',X+\frac{a_x}{2M}(m-m');i\omega_n)\Big),$$

$$F_{L_1,L_2}(m,X;i\omega_n) = G^0_{L_1}(-i\omega_n)\sum_{L'}\sum_{m'}\cdot$$

$$\cdot\Big(\Sigma^{11}_{L_1,L'}(X+\frac{a_x}{2M}m',m-m';i\omega_n)F_{L',L_2}(m',X-\frac{a_x}{2M}(m-m');i\omega_n)+$$

$$+\Sigma^{02}_{L_1,L'}(m-m',X+\frac{a_x}{2M}m';i\omega_n)G_{L_2,L'}(\frac{a_x}{2M}(m-m')-X,m';i\omega_n)\Big)\,,$$

где собственно-энергетические части Σ^{02} и Σ^{11} определяются, соответственно, как

$$\Sigma^{11}_{L_1,L_2}(X,m;i\omega_n)=\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\chi^*_{L_1,X+ma_x/2M}(\mathbf{r}_1)\chi_{L_2,X-ma_x/2M}(\mathbf{r}_2)\Sigma^{11}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;i\omega_n),$$

$$\Sigma^{02}_{L_1,L_2}(m,X;i\omega_n)=\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\chi^*_{L_1,X+ma_x/2M}(\mathbf{r}_1)\chi^*_{L_2,ma_x/2M-X}(\mathbf{r}_2)\Sigma^{02}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;i\omega_n).$$

Используя свойства периодичности (10) и четности гриновских функций G и F, для квадратной решетки $M=1$ уравнение (11) можно диагонализовать по переменной m с помощью следующего преобразования:

$$G_{L_1,L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)=\sum_m e^{-2\pi imY/a_y}G_{L_1,L_2}(X-\frac{a_x}{2M}m,m;i\omega_n),\qquad(12)$$

$$F_{L_1,L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)=e^{-iXY/l^2}\sum_m e^{2\pi imY/a_y}F_{L',L_2}(m,\frac{a_x}{2M}m-X;i\omega_n)$$

Построенная таким образом функция $G(\mathbf{R})$ является периодичной, а $F(\mathbf{R})$ – квазипериодичной по X и Y с периодами a_x и a_y, соответственно. Заметим, что $\mathbf{R}$ определяет зону Бриллюэна.

$$G_{L_1,L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)=G^0_{L_1}(i\omega_n)\delta_{L_1,L_2}+\qquad(13)$$

$$+G^0_{L_1}(i\omega_n)\sum_{L'}\left(\Sigma^{11}_{L_1,L'}(\mathbf{R};i\omega_n)G_{L',L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)+\Sigma^{20}_{L_1,L'}(\mathbf{R};i\omega_n)F_{L',L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)\right)$$

$$F_{L_1,L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)=G^0_{L_1}(-i\omega_n)\sum_{L'}\left(\Sigma^{11}_{L_1,L'}(-\mathbf{R};i\omega_n)F_{L'.L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)+\right.$$

$$\left.+\Sigma^{02}_{L_1,L'}(\mathbf{R};i\omega_n)G_{L',L_2}(\mathbf{R};i\omega_n)\right)$$

При значениях поля $H_{c1}\ll H\le H_{c2}$ вычислим функции Грина $F(\mathbf{R})=F_{0,0}(\mathbf{R})$ и $G(\mathbf{R})=G_{0,0}(\mathbf{R})$ в приближении нулевого уровня Ландау (ультраквантовый предел). При расчетах вместо функций Грина G с $L\neq 0$ будем использовать выражение (4), так как плотность конденсата мала ($\frac{2eH}{m}\gg 4\pi n_0 a/m$), где n_0 - плотность конденсата, a - эффективная амплитуда рассеяния:

$$G(\mathbf{R})=\frac{\Sigma^{11}(-\mathbf{R})-G_0^{0^{-1}}(-i\omega_n)}{\mathrm{Det}(\mathbf{R};i\omega_n)}\qquad(14)$$

$$F(\mathbf{R})=-\frac{\Sigma^{02}(\mathbf{R})}{\mathrm{Det}(\mathbf{R};i\omega_n)},$$

где

$$\mathrm{Det}(\mathbf{R};i\omega_n)=\Sigma^{20}(\mathbf{R})\Sigma^{02}(\mathbf{R})-(\Sigma^{11}(\mathbf{R})+\frac{p_z^2}{2m}-\mu'-i\omega_n)(\Sigma^{11}(-\mathbf{R})+\frac{p_z^2}{2m}-\mu'+i\omega_n),$$

$$\Sigma^{20}(\mathbf{R}) = \Sigma^{20}_{0,0}(\mathbf{R}), \quad \Sigma^{11}(\mathbf{R}) = \Sigma^{11}_{0,0}(\mathbf{R}), \quad \mu' = \mu - \frac{eH}{m}$$

, μ – химический потенциал, который определяется точно так же как и для незаряженного бозе-газа из уравнения

$$\mu' = \Sigma^{11}(0) - \Sigma^{20}(0). \tag{15}$$

Сделав замену $\omega_n \to -i\omega - \delta$, получим уравнение на спектр возбуждений ЗБГ:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{R};\omega) = 0 \tag{16}$$

В реальных системах, где возможно образование тяжелых биполяронов [7], имеются легкие электроны, которые экранируют бозоны. Кроме того, в металлооксидах кулоновская часть взаимодействия между биполяронами мала по сравнению с короткодействующей, из-за большой величины диэлектрической постоянной ε_0. Вследствие этого, предположение о короткодействующем потенциале взаимодействия между заряженными бозонами не только упрощает описание, но и представляется наиболее реальным. В непосредственной окрестности критической точки T_{c2} при расчете собственно энергетических частей Σ^{11} и Σ^{20} можно ограничится только первой поправкой по плотности конденсата n_0 и считать полную плотность частиц $n = n_0 + n'$ независящей от координат. В первом порядке по теории возмущений собственно-энергетическая часть Σ^{11} определяется следующим выражением:

$$\Sigma^{11}(\mathbf{R}) = \frac{2v_0}{\sqrt{2\pi}\, l a_y} \int \frac{d\mathbf{R}'}{2\pi l^2} \exp\left(-\frac{X'^2}{2l^2}\right) \vartheta_3\left(\frac{Y'}{a_y} \mid i\right) \int \frac{dp_z}{2\pi} n'(\mathbf{R}' - \mathbf{R}, p_z) + \tag{17}$$

$$+\Sigma^{11}_{\{n_0\}}(\mathbf{R}),$$

где

$$\Sigma^{11}_{\{n_0\}}(\mathbf{R}) = 2n_0 v_0 \exp(-\frac{X^2}{2l^2}) \vartheta_3\left(i\frac{X}{a_y} \mid i\right) \vartheta_3\left(-\frac{Y}{a_y} \mid i\right)$$

для квадратной решетки, где $\vartheta_3(v \mid \tau)$ — тэта-функций Якоби [8], а

$$n'(\mathbf{R}, p_z) = -T \lim_{\tau \to 0} \sum_{\omega} G(\mathbf{R}, p_z; i\omega_n) e^{-i\omega_n \tau}$$

— число надконденсатных частиц. Интегрирование в (17) по X проводится в бесконечных пределах, а по Y – по периоду a_y.

Следствием однородности полной плотности бозонов является то, что $\Sigma^{11}(\mathbf{R})$ также не зависит от координат. Чтобы убедится в этом, воспользуемся найденным в работе [3] спектром $\varepsilon(p_z) = J\sqrt{p_z}$ для $\omega_n = 0$ при $H = H_{c2}$. Вблизи H_{c2} рассмотрим область, в которой параметр

$$\Lambda = \frac{J(2mJ)^{1/3}}{v_0 n_0} \gg 1.$$

Тогда, используя найденное в работе [3] выражение для J, для $\sigma(\mathbf{R}) = \Sigma^{11}(\mathbf{R}) - \Sigma^{11}(\mathbf{0})$ получим следующее уравнение:

$$\sigma(\mathbf{R}) = \sigma^0(\mathbf{R}) + \frac{2l}{\sqrt{2\pi} a_y} \ln\Lambda \int \frac{d\mathbf{R}'}{2\pi l^2} \exp\left(-\frac{X'^2}{2l^2}\right) \vartheta_3\left(\frac{Y'}{a_y} \mid i\right) \sigma(\mathbf{R}' - \mathbf{R}), \tag{18}$$

где $\sigma^0(\mathbf{R}) = \Sigma^{11}_{\{n_0\}}(\mathbf{R}) - \Sigma^{11}_{\{n_0\}}(0)$. Решение этого уравнения может быть найдено аналитически, однако мы ограничимся оценкой σ в пределе $\ln\Lambda \gg 1$. В этом случае $\sigma \sim \dfrac{\sigma^0}{\ln\Lambda}$ и, следовательно, можно пренебречь $\Sigma^{11}(\mathbf{R})$ по сравнению с аномальной собственно энергетической частью. Тогда спектр определяется только аномальной собственно – энергетической частью $\Sigma^{20}(\mathbf{R})$:

$$\omega^2(\mathbf{R}) = \Sigma^{20}(\mathbf{R})\Sigma^{02}(\mathbf{R}) - (\Sigma^{20}(0))^2 \tag{19}$$

Для вида волновой функции (1), используя определение тэта-функций Якоби [8], получим для квадратной вихревой решетки:

$$\Sigma^{20}(\mathbf{R}) = v_0 n_0 \exp\left(i\frac{XY}{l^2} - \frac{X^2}{l^2}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{Y - iX}{a_y} \mid i\right), \tag{20}$$

где параметры решетки $a_x = a_y = l\sqrt{2\pi}$, v_0 — потенциал взаимодействия, $n_0 = \frac{N_0}{V}$ — средняя плотность бозе-конденсата и $\Sigma^{02}(\mathbf{R}) = \Sigma^{20^*}(-\mathbf{R})$.

Вблизи дна магнитной зоны Бриллюэна спектр возбуждений носит линейный характер:

$$\omega(\mathbf{R}) = \frac{v_0 n_0}{l}\vartheta_3^2\,(0 \mid i)\,R, \tag{21}$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Анизотропия спектра (16) приводит к анизотропии и неоднородности локальной плотности состояний носителей. Плотность состояний определяет, в свою очередь, туннельную проводимость $\sigma(V, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, которая может быть измерена с помощью сканирующего туннельного микроскопа.

По аналогии с традиционными сверхпроводниками следует ожидать, что в ЗБГ также реализуется треугольная вихревая решетка. Однако исследования вопроса о том какой тип решетки реализуется на самом деле вблизи H_{c2}, выходят за рамки этой статьи.

---

1. A.Alexandrov, J.Ranninger, and S.Robaszkiewicz, Phys, Rev. B **33**, 4226 (1986).
2. А.С.Александров, Д.А.Самарченко, ЖЭТФ **99**, 541 (1991).
3. А.С.Александров, Д.А.Самарченко, С.В.Травень, ЖЭТФ **93**, 1007 (1987).
4. J.C.Ryan and A.K.Rajagopal, Phys. Rev. B **47**, 8843 (1993).
5. J. Zak, Phys. Rev. A **134**, 1607 (1964).
6. С.Т.Беляев, ЖЭТФ **34**, 417 (1958).
7. А.С.Александров, А.Б.Хмелинин, М.А.Баранов- ФТТ **33**, 1243 (1991).
8. Г. Корн,Т. Корн, Справочник по математике, М: Наука, 1974, с.832.