Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 5, стр. 204 - 207 *5 марта 1983 г.*

КОЛЛАПС ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Е.А.Кузнецов, С.Л.Мушер, А.В.Шафаренко

Показано существование коллапса звуковых волн в средах с положительной дисперсией. Предложено качественное описание волновых коллапсов, основанное на анализе интегралов движения.

Идея волнового коллапса в настоящее время получила широкое распространение в физике плазмы и нелинейной оптике. Первым исследованным явлением такого типа была самофокусировка света в нелинейном диэлектрике [1,2]. Затем целый ряд аналогичных явлений был обнаружен в физике плазмы [3–6].

Общим свойством всех этих систем является гамильтоновость уравнений. Это обстоятельство является основой для изучения волновых коллапсов с единой точки зрения. Мы покажем, что сама возможность коллапса и его динамика определяются достаточно грубыми характеристиками системы – трансформационными свойствами гамильтониана при масштабных преобразованиях. Данный подход мы продемонстрируем на новом примере коллапса звуковых волн в средах с положительной дисперсией (магнитозвуковые волны в плазме, фононы в жидком гелии и др.) Эта задача представляется особенно важной для исследования бесстолкновительных ударных волн в магнитоактивной плазме, их структуры, устойчивости и т. д. [7].

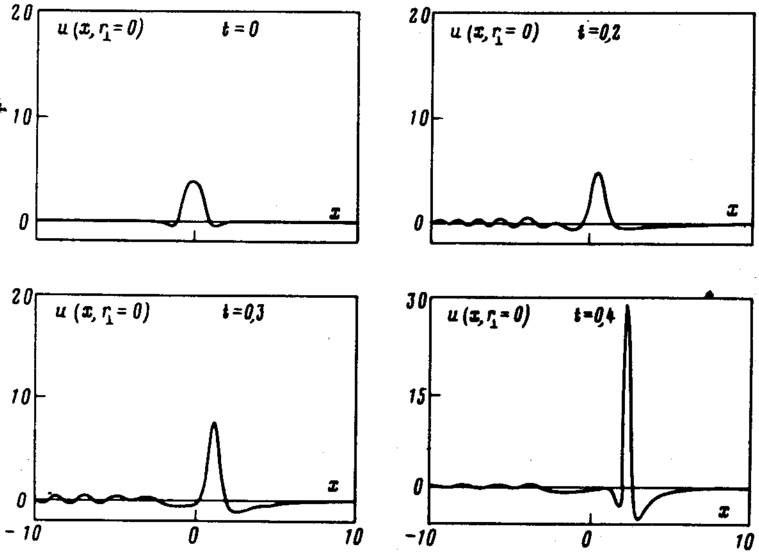

Рис. 1. Распределение u на оси $r_\perp = 0$ в последовательные моменты времени

Мы ограничимся рассмотрением слабонелинейных волн, когда применимо уравнение Кадомцева – Петвиашвили (КП) [8], которое запишем в гамильтоновском виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\ , \tag{1}$$

где гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int\left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{(\nabla_\perp W)^2}{2} - u^3\right)d\mathbf{r}\ ; \quad W_x = u\ .$$

В одномерном и двумерном случаях ($d = 1{,}2$) оно интегрируется методом обратной задачи рассеяния и имеет бесконечное число интегралов движения [9]. В трехмерном случае это уравнение сохраняет кроме $\mathcal{H}$, импульс $\mathbf{P} = \int u\,\nabla W\,d\mathbf{r}$ и продольную проекцию момента импульса M_x.

Аналогия с другими родственными явлениями, например, с ленгмюровским коллапсом прослеживается уже на линейной стадии неустойчивости одномерного солитона уравнения (1)

$$u\,(x,\,t\,) = \frac{2\,\nu^2}{\operatorname{ch}^2\nu\,(x - 4\nu^2 t)}\ .$$

Инкремент $\Gamma\,(k_\perp)$ [10],

$$\Gamma\,(k_\perp) = \frac{4k_\perp}{\sqrt{3}}\left(\nu^2 - \frac{4k_\perp}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}$$

как и для ленгмюровской волны с $k = 0$, положителен в конечной области $k_\perp < k^* = \frac{\sqrt{3}}{4}\nu^2$. При $k_\perp = k^*$ неустойчивость, обусловленная нелинейными эффектами, стабилизируется за счет дисперсионных членов.

Основная причина неустойчивости состоит в том, что скорость солитона уменьшается с ростом амплитуды. Поэтому при слабой модуляции солитона по поперечной координате участки с меньшей амплитудой будут обгонять участки с бо́льшей амплитудой. В результате возникает неустойчивость самофокусировочного типа. Аналогичным образом неустойчивы двумерные солитоны относительно изгибов по третьей координате [11].

Мы приведем простые размерностные соображения о нелинейной динамике системы, основанные на анализе интегралов движения. Ограничимся рассмотрением аксиально симметричных распределений, для которых $\mathbf{P}_\perp = M_x = 0$.

Рассмотрим масштабные преобразования, сохраняющие P_x

$$u(x, \mathbf{r}_\perp) = \alpha^{-1/2} \beta^{(1-d)/2} u(x/\alpha, \mathbf{r}_\perp/\beta)$$

при которых гамильтониан становится функцией параметров α, β :

$$\mathcal{H} = \alpha^{-2} I_1 + \alpha^2 \beta^{-2} I_2 - \alpha^{-1/2} \beta^{(1-d)/2} I_3,$$

$$I_1 = \int \frac{u_x^2}{2} d\mathbf{r}, \quad I_2 = \int \frac{(\nabla_\perp W)^2}{2} d\mathbf{r}, \quad I_3 = \int u^3 \, d\mathbf{r}.$$

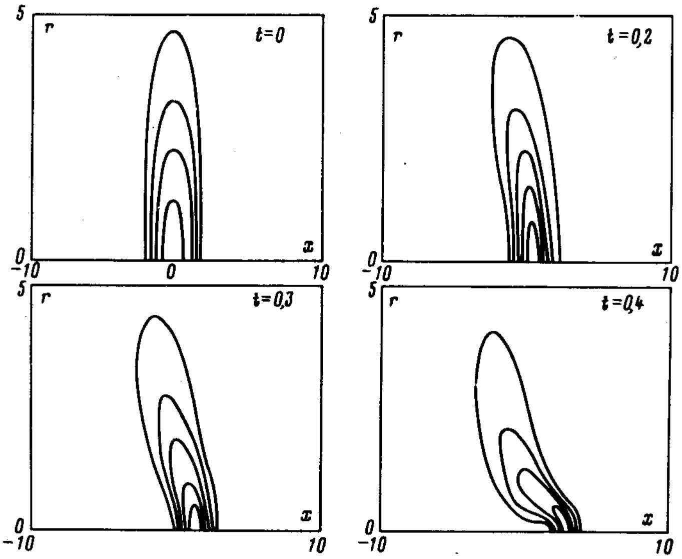

Рис.2. Линии уровня функции $u(x, r_\perp)$ в те же моменты времени

В зависимости от размерности пространства поведение $\mathcal{H}$ различно. При $d = 2$ $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ ограничен снизу, $\mathcal{H}_{min} = -vP_x/6$ соответствует двумерному солитону [11], движущемуся со скоростью v. При $d = 3$ трехмерному солитону отвечает седловая точка, поэтому он неустойчив. Гамильтониан на этом решении, как и для трехмерного ленгмюровского солитона, положителен $\mathcal{H}_s = vP_x/2$. Подчеркнем, что $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ при $d = 3$ неограничен снизу. Неограниченность обеспечивается нелинейными членами, роль которых при уменьшении масштабов α, β становится определяющей. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть линии наибыстрейшего спуска функции $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ $\alpha^2/\beta = \mathrm{const}$. Такое поведение $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ означает также, что общее решение должно иметь автомодельную асимптотику $r_\perp/x^2 = \mathrm{const}$. Такая ситуация – неограниченность $\mathcal{H}$ при фиксированных других интегралах: числе волн, импульсе и т.д., является общей для всех систем, в которых существует явление коллапса. Неограниченность $\mathcal{H}$ возникает за счет нелинейных членов, которые растут с уменьшением масштабов быстрее дисперсионных. Для описания эволюции таких систем, как и для механических систем с трением, может быть применен энергетический принцип. С этой точки зрения процесс коллапса аналогичен падению частицы в неограниченном потенциале. Роль трения в данном случае играет излучение из области повышенной концентрации поля (каверны). Излучение, с одной стороны, должно мало изменять число квантов, в противном случае из-за уменьшения интенсивности исчезнет причина самого „падения". С другой стороны, излучение должно уносить положительную часть гамильтониана, обеспечивая такое „падение". В результате в отдельных точках происходит прорастание особенностей – коллапс. При коллапсе излучение становится все более коротковолновым с характерным размером по k, пропорциональным обратному размеру каверны. Таким образом, излучаемые кавернами колебания формируют слаботурбулентный фон (для них дисперсионные члены превосходят нелинейные, $\mathcal{H} > 0$).

Для систем, у которых нелинейные и дисперсионные члены в $\mathcal{H}$ ведут себя одинаково при масштабных преобразованиях, возможен безызлучательный коллапс. Такая ситуация имеет место при двумерной самофокусировке света за счет керровской нелинейности, при сверхзвуковом ленгмюровском и нижнегибридном коллапсах.

Для изучения динамики коллапса звуковых волн в средах с положительной дисперсией было проведено численное моделирование уравнения КП в аксиально симметричном случае. При численном решении уравнения КП возникает ряд трудностей, связанных с нелокальным законом $kx(\omega + k_x^3) = -k_\perp^2$, приводящим к большим значениям групповых скоростей низких гармоник. Поэтому была разработана новая разностная схема высокого порядка точности $O(\Delta x^4, \Delta r_\perp^2, \Delta t^2)$, использующая итерационное расщепление. Одним из критериев работоспособности схемы было тестирование решения в виде двумерного солитона [9]. Для того, чтобы учесть возможные эффекты излучения из системы, были выбраны диссипативные граничные условия, не сохраняющие $\mathcal{H}$ и P_x. Для контроля счета вычислялись потоки $\mathcal{H}$ и P_x на границах и проверялось их сохранение. Во всех вариантах точность сохранения $\mathcal{H}$ была не хуже, чем 5 %, а P_x сохранялось на порядок лучше.

При значениях $\mathcal{H}$, меньших критического (в данном случае он оказывался положительным), в численных экспериментах мы наблюдали образование каверн, амплитуда в которых увеличивалась на порядок, т. е. интенсивность – на два порядка (см. рис. 1). При этом наблюдалось излучение из каверны, гамильтониан уменьшался с 30 до – 80, а P_x изменялся незначительно ($\sim 10\,\%$). Как и при неустойчивости фронта солитона, при коллапсе центральная область отставала от периферии и формировался U-образный профиль (рис.2). При $\mathcal{H}$, бóльшем критического значения, происходило расплывание начального распределения.

Авторы благодарны В.Е.Захарову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Аскарьян Г.А.* ЖЭТФ, 1962, **42**, 1568.
2. *Власов В.Н., Петрищев И.А., Таланов В.И.* Изв. высш. уч. зав., серия Радиофизика, 1971, **14**, 1352.
3. *Захаров В.Е.* ЖЭТФ, 1972, **62**, 1745.
4. *Кузнецов Е.А.* ЖЭТФ, 1974, **66**,
5. *Мушер С.Л., Стурман Б.И.* Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, 537.
6. *Gekelman W., Stenzel R.*, Phys. Rev. Lett., 1975, **35**, 1708.
7. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. М.: 1979.
8. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* ДАН СССР, 1970, **192**, 753.
9. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. М.: 1980.
10. *Захаров В.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, 7.
11. *Кузнецов Е.А., Турицын С.Н.* ЖЭТФ, 1982, **82**, 1457.

Институт автоматики и электрометрии
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
14 декабря 1982 г.