*Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 7, стр. 317 – 319* *5 апреля 1983 г.*

# О „СВЕРХЗВУКОВОЙ" СТАБИЛИЗАЦИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ТОНКОЙ АТМОСФЕРЕ

*С.В.Базденков, О.П.Погуце*

Тангенциальный разрыв в тонкой атмосфере устойчив, если амплитуда скачка скорости $V > 2\sqrt{2}\, C_g$, где $C_g$ – скорость поверхностных гравитационных волн. Сила Кориолиса и конечная ширина зоны течения являются дестабилизирующими факторами.

В несжимаемой жидкости тангенциальный разрыв абсолютно неустойчив. Учет сжимаемости среды, т.е. конечности скорости звука $V_s$, приводит к стабилизации разрыва [1] относительно двумерных возмущений, если амплитуда скачка скорости $V > 2\sqrt{2}\, V_s$. В случае же трехмерных возмущений разрыв неустойчив и в сжимаемой среде [2]. Тем не менее „сверхзвуковая" стабилизация разрыва может оказаться реальной, если возмущения с волновыми векторами **k**, непараллельными плоскости течения, почему-либо невозможны или несущественны. Например, в приближении мелкой воды близость дна обусловливает практическую двумерность течения. Роль скорости звука при этом играет скорость поверхностных гравитационных волн $c_g = \sqrt{gH}$, где $H$ – глубина жидкости, $g$ – ускорение силы тяжести. Как будет показано ниже, действительно стабилизация имеет место при выполнении условия

$$V > 2\sqrt{2}\, c_g . \tag{1}$$

В экспериментах [3] по моделированию генерации циклонов и антициклонов при уменьшении амплитуды скачка скорости в тангенциальном разрыве наблюдалось пороговое возбуждение нелинейных течений жидкости (вихрей). Физический смысл пороговой неустойчивости был неясен. Подробная экспериментальная проверка [3] предложенного в настоящей работе механизма стабилизации разрыва показала хорошее количественное согласие между экспериментальными результатами и критерием (1). Ниже приводится как вывод самого критерия (1), так и обсуждаются возможные влияния силы Кориолиса и конечной ширины зоны течения на устойчивость тангенциального разрыва в мелкой воде.

Крупномасштабные течения в тонкой вращающейся атмосфере описываются уравнениями [4]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\vec{\nabla})\mathbf{V} = -g\vec{\nabla} H + \Omega\,[\mathbf{V}\times\mathbf{e}_z] \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla}(H\mathbf{V}) = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\vec{\nabla} = \mathbf{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ направлены на восток и на север, $\mathbf{e}_z = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y]$,

$\Omega$ – параметр Кориолиса. Ниже в качестве основного течения будем рассматривать тангенциальный разрыв

$$\begin{cases} \mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_x V_0 \operatorname{sign}(y) \\[2mm] g\dfrac{dH_0}{dy} = -\Omega V_0 \operatorname{sign}(y) \end{cases} \tag{3}$$

и для простоты положим в дальнейшем $\Omega = \Omega_0 = \mathrm{const}$. Поскольку в реальных условиях такие течения ограничены в меридианальном (вдоль „$y$") направлении, будем также рассматривать разрыв в канале шириной $2a$ (т.е. $|y| < a$), допуская однако случай $ak \to \infty$.

Без учета силы Кориолиса ( $\Omega_0 = 0$ ) дисперсионное соотношение для фазовой скорости колебаний $c(k)$, как обычно [1], получается из условия непрерывности глубины жидкости на поверхности разрыва и условия „непротекания" этой поверхности:

$$(c - V_0)^2 \frac{\operatorname{cth}(z_1)}{z_1} + (c + V_0)^2 \frac{\operatorname{cth}(z_2)}{z_2} = 0, \tag{4}$$
$$z_{1,2} = ak\sqrt{1 - \frac{(c \mp V_0)^2}{gH_0}} .$$

Неустойчивые ветви колебаний имеют $\operatorname{Im}(c) \neq 0$. Поэтому в канале неограниченной ширины ( $ak = \infty$ ) решения уравнения (4), соответствующие неустойчивым колебаниям, имеют вид

$$c^2 = V_0^2 + gH_0 - \sqrt{(gH_0)^2 + 4gH_0 V_0^2} . \tag{5}$$

Отсюда следует, что неустойчивость возможна только при $V_0^2 < 2gH_0$, что является аналогом „сверхзвуковой" стабилизации тангенциального разрыва, рассмотренной в [1]. Если же ширина канала велика, но конечна, $ak \gg 1$, эффект стабилизации, вообще говоря, исчезает, поскольку при этом инкременты колебаний обращаются в нуль только для определенных значений скорости течения

$$\frac{V_0^2}{gH_0} = 1 + \left[ \frac{\pi(2m + 1)}{2ak} \right]^2 ,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Между этими значениями $V_0$ инкременты $\gamma$ отличны от нуля, хотя и являются малыми,

$$|\gamma| \propto |kV_0 \frac{\ln ak}{ak}| \tag{6}$$

во всяком случае, гораздо меньше обычных инкрементов неустойчивости Кельвина – Гельмгольца ( $\propto |kV_0|$ ). В условиях эксперимента столь малые $\gamma$ могут подавляться вследствие конечной (ненулевой) ширины области „скачка" скорости.

Учет силы Кориолиса приводит к появлению характерного размера задачи, а именно, радиуса Россби $r_0 = \sqrt{gH_0}/\Omega_0$. Другим следствием условия $\Omega_0 \neq 0$ является непостоянство $H$ (см. (3)), причем ширина „сверхзвуковой" области течения, где $V_0^2 > gH_0$, не может превышать $V_0/\Omega_0$. Ясно, что роль силы Кориолиса в устойчивости тангенциального разрыва определяется значениями безразмерных параметров ( $kr_0$ ) и ( $V_0/c_g$ ). Если $kr_0 \gg 1$, то влияние силы Кориолиса незначительно, и стабилизация разрыва имеет место в соответствии с (5), (1). Наоборот, при $kr_0 \ll 1$, $V_0/c_g \ll 1$ течение является геострофическим, $\mathbf{V} \approx \frac{g}{\Omega_0}[\mathbf{e}_z \times \vec{\nabla} H]$, и следовательно, несжимаемым. В этом случае, согласно [5], разрыв неустойчив, причем инкременты примерно такие же, как и в неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Если, наконец, $kr_0 \ll 1$, $V_0/c_g \gg 1$, то инкременты колебаний малы в меру $(V_0/c_g)^{-1}$, и в пределе $V_0/c_g \to \infty$ течение стабилизируется.

Авторы благодарны академику Б.Б.Кадомцеву за ценные замечания.

## Литература

1. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Механика сплошных сред, М.: Гостехиздат, 1953.
2. *Сыроватский С.И.* Письма в ЖЭТФ, 1954, 27, 121.
3. *Антипов С.В., Незлин М.В., Родионов В.К., Снежкин Е.Н., Трубников А.С.* Письма в ЖЭТФ, данный номер, стр. 319.

4. *Hasegawa A., Mima K.* Phys. Fluids, 1978, **21**, 87.
5. *Морозов Н.Н., Погуце О.П.* ДАН, 1982, **263**, 1354.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
21 февраля 1983 г.