Письма в ЖЭТФ, том 60, вып.7, стр.518 - 521 © 1994г. 10 октября

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНДЕКСОВ ПРОВОДИМОСТИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А.А.Снарский

Киевский политехнический институт

252056 Киев, Украина

Поступила в редакцию 4 августа 1994 г.

На основании гипотезы подобия критических флуктуаций в теории фазовых переходов II рода и аналогии между задачами теории перколяции и фазовых переходов II рода получено соотношение для критических индексов проводимости t и q: $t + q = \nu d - \beta$, которое в двумерном случае приводит к точному значению $q_2 = t_2 = 91/72$. Обсуждается нарушение полученного соотношения для критической перколяции размерности $d = 6$.

Как хорошо известно [1,2], эффективная проводимость случайно неоднородных двухфазных сред вблизи порога протекания ведет себя критическим образом:

$$\sigma_e \approx \sigma_1 \tau^t, \quad \tau > 0; \qquad \sigma_e \approx \sigma_2 |\tau|^{-q}, \quad \tau < 0, \tag{1}$$

где σ_1 и σ_2 – проводимости фаз ($\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$), $\tau = (p-p_c)/p_c$ – близость к порогу протекания p_c, а t и q – критические индексы проводимости, универсальные константы, зависящие только от мерности задачи.

В свое время было предпринято много усилий для того, чтобы связать "динамические индексы" t и q с "геометрическими", характеризующими расходимость корреляционной длины вблизи $p_c - \nu$, среднего числа узлов конечного кластера $S - \gamma$ и т.п. Например, в книге [3] (см. также [4]) собраны полученные различными авторами выражения для критических индексов t: $1+\beta$, $(d-1)\nu$, $1+(d-2)\nu$, $1+2\beta$, $(5d-6\nu)/4$, $((3d-4)\nu-\beta)/2$ и q: $2\nu-\beta$, $\nu-\beta/2$. Однако ни одно из этих выражений не является удовлетворительным. Ниже будет показано, что соображения, основывающиеся на гипотезе подобия, позволяют найти связь между "геометрическими индексами" и суммой $t+q$. В двумерном случае эта связь позволяет найти точное значение $t_z = q_2$.

Изложение основано на предположениях о справедливости гипотезы подобия критических флуктуаций в теории фазовых переходов II рода [5,6] (А) и на аналогии между задачами теории перколяции и задачей о фазовом переходе II рода [1,2,7] (В).

Согласно (А) (см., например, [6], с. 73, 74), вблизи точки фазового перехода T_c намагниченность m имеет вид

$$m = \xi^{-d/\sigma} w_{\pm}(h\xi^{-d_h}), \tag{2}$$

где $\xi \sim \tau^{-\nu}$ – корреляционная длина, $\tau \sim T - T_c$, h – внешнее поле (в данном случае магнитное), $w_{\pm}$ – функции размерности нуль ([6], гл.II, §3), d_σ, d_h – критические индексы:

$$d_\sigma = (d-2+\eta)/2, \qquad d_h = (d+2-\eta)/2. \tag{3}$$

В области размытия фазового перехода, существующей только при $h \neq 0$, аргумент функций $w_\pm$ становится порядка единицы. То значение τ, при котором это происходит, обозначим Δ – в теории перколяции ее принято называть областью размазки. Таким образом, в области размазки (размытия фазового перехода) $|\tau| \approx \Delta$, и с учетом $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ получаем

$$\Delta \sim h^{1/\nu d_h}, \tag{4}$$

откуда корреляционная длина в этой же области равна

$$\xi_c = \xi(|\tau| \approx \Delta) \sim h^{-1/d_h}. \tag{5}$$

С другой стороны, согласно [5], корреляционная длина в области размазки

$$\xi_c \sim h^{-\mu}, \qquad \mu = 2/(d+2-\eta). \tag{6}$$

Как должно быть,

$$\mu = \frac{2}{d+2-\eta} = \frac{1}{d_h}. \tag{7}$$

Аналогичная ситуация (равенство $\mu = 1/d_h$) должна иметь место и в теории перколяции. Роль магнитного поля, как известно [1,2], здесь играет отношение проводимостей фаз $h = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$. При $\tau \to 0$, но при $h \neq 0$, $\sigma_e(p < p_c)$ и $\rho_e(p > p_c) \equiv 1/\sigma_e(p > p_c)$ уже не стремятся к бесконечности; в области размазки $\sigma_e(|\tau| \approx \Delta)$ имеет конечное значение.

Аналог скейлинговой функции (2) для σ_e [1,2] имеет вид

$$\sigma_e \approx (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{1/(t+q)} \Psi(h\xi^{(t+q)/\nu}). \tag{8}$$

Как и в теории фазовых переходов II рода, $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ (конечно, критические индексы принимают другие численные значения). Таким образом с одной стороны, из (8) следует выражение для области размазки $h\xi^{(t+q)/\nu} \sim 1$:

$$\Delta \approx h^{1/(t+q)}, \tag{9}$$

то есть корреляционная длина в области размазки равна

$$\xi_c = \xi(|\tau| \approx \Delta) \sim \Delta^{-\nu} \approx h^{-\nu/(t+q)}. \tag{10}$$

С другой стороны, как и ранее (6), (7),

$$\xi_c \sim h^{-\mu} = h^{-2/(d+2-\eta)}, \tag{11}$$

откуда

$$\frac{\nu}{t+q} = \frac{2}{s+2-\eta}. \tag{12}$$

Используя известные соотношения между критическими индексами, можно выразить критический индекс η через хорошо известный критический индекс β, характеризующий плотность критического кластера $\eta = 2\beta/\nu - (d-2)$. Окончательно получаем

$$t + q = d\nu - \beta. \tag{13}$$

Заметим, что комбинация $d\nu - \beta$ хорошо известна в теории перколяции $d\nu - \beta = d_F\nu$, где d_F – фрактальная размерность перколяционного кластера. Таким образом одновременное использование гипотез подобия критических флуктуаций в теории фазовых переходов II рода и аналогии между задачами теории перколяции и задачей о фазовом переходе II рода приводят к соотношению, связывающему между собой "кинетические" критические индексы – критические индексы проводимости t и q и фрактальную размерность перколяционного кластера, то есть "геометрические" критические индексы.

В двумерном случае $t_2 = q_2$ [1,8] (нижний индекс означает размерность задачи) и из (13) следует

$$t_2 = q_2 = \nu_2 - \frac{\beta_2}{2}. \tag{14}$$

Заметим, что это выражение совпадает с тем, что было получено для q_2 в [9,10]. Значения ν_2 и β_2 известны точно: $\nu_2 = 4/3$, $\beta_2 = 5/36$, что дает для критических индексов проводимости в двумерном случае

$$t_2 = q_2 = \frac{91}{72} = 1,263(8). \tag{15}$$

Численно (15) хорошо согласуется с известными из литературы значениями, см., например, [12] (в таблице III – критический индекс t обозначен через μ). Соотношение (15) точно выполняется для случая $d = 1$, для которого известны точные значения (см., например, [13]) $\nu_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $q_1 = 1$, а также $t_1 = 0$.

Несмотря на точное согласие соотношения (13) в одномерном случае и хорошее численное согласие в $d = 2,3$ для критической размерности в перколяции $d = d_c = 6$ соотношение (13) является противоречивым. В самом деле, считается общепринятым (см., например, [13]), что $\nu_6 = 1/2$, $t_6 = 3$, $q_6 = 0$. А для удовлетворения (13) при $t_6 = 3$ и $\nu_6 = 1/2$ необходимо, чтобы $q_6 = -1$. Таким образом (13) в $d = 6$ не удовлетворяется, что означает (если принять $q_6 = 0$) нарушение в теории перколяции гипотезы подобия критических флуктуаций по крайней мере в $d = 6$.

С другой стороны, расчеты, основанные на теоретико-вероятностных соображениях, также дают $q_6^* = -1$. В самом деле, в [7] на основе этих соображений было получено $t^* = 1 + \nu(d-2)$, что в случае $d = d_c = 6$ приводит к точному значению $t_6^* = t_6 = 1 + (6-2)/2 = 3$. Аналогичные соображения для q [14] дают $q^* = 1 - \nu(d-2)$, что в случае $d = d_c = 6$ приводит к $q_6^* = 1 - (6-2)/2 = -1$, то есть $q_6^* \neq q_6$. Заметим, что порог протекания в $d = 6$ равен нулю. Поэтому введение в этом слуае критического индекса q, описывающего поведение системы слева от порога протекания, является проблематичным.

1. A.L.Efros and B.I.Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
2. J.P.Straley, J. Phys. C **9**, 783 (1976).
3. D.Stauffer. Introduction to Percolation Theory. ed be Taylor and Francis, London, 1985.
4. M.Sahimi. J. Phys. C**17**, L355 (1984).
5. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982; Л.Д.Ландау, И.М.Лифшиц, Статистическая физика, ч.1, М.: Мир, 1976.
6. Ш.Ма. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.
7. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979.
8. J.P.Straley, Phys. Rev. B**15**, 5733 (1977).

9. J.Kertesz, J. Phys. **A16**, L471 (1983).
10. M.Sahimi. The Mathematics and Physics of Disordered Media, Lectures in Mathematics, 1035, 3146 (1983).
11. M.P.den Nijs, J. Phys. **A12**, 1857 (1979).
12. M.B.Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
13. T.Ohsuki, and T.Keyes, J. Phys. **A17**, L559 (1984).
14. D.C.Wright, D.J.Bergman, and Y.Kantor, Phys. Rev. **B33**, 396 (1986).