

Показатели Ляпунова в задаче Хенона–Хейлеса

И. И. Шевченко¹⁾, А. В. Мельников

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 25 апреля 2003 г.

После переработки 27 мая 2003 г.

В задаче Хенона–Хейлеса путем численного интегрирования получена зависимость значения максимального характеристического показателя Ляпунова хаотического движения от энергии системы. Вопреки выводам Бенеттина и др. [4], она не является экспоненциальной, а близка к степенной. Что касается зависимости динамической энтропии от энергии, то наблюдаемая зависимость, действительно, в согласии с [4], близка к экспоненциальной.

PACS: 02.70.–с, 05.45.–а, 95.10.–а, 98.10.+z

Задача Хенона–Хейлеса традиционно привлекает внимание исследователей, так как именно в ней впервые в гамильтоновой механике был обнаружен [1] хаотический тип поведения. Гамильтониан задачи имеет вид [1–3]

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3, \quad (1)$$

где q_1, q_2 – координаты, p_1, p_2 – сопряженные им импульсы.

Хенон и Хейлес [1] путем численного интегрирования системы, задаваемой гамильтонианом (1), построили сечения Пуанкаре фазового пространства системы и обнаружили области хаотического движения. Области хаоса увеличиваются с возрастанием энергии, и при величине энергии $E \equiv H = 1/6$ практически все фазовое пространство возможного движения заполнено хаотической компонентой [1].

Определить качественный характер движения (регулярный/хаотический) позволяет вычисление характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ; см., например, [2]). ХПЛ имеет смысл средней скорости экспоненциальной расходимости близких траекторий в фазовом пространстве. Нулевая величина ХПЛ указывает на регулярный характер движения, ненулевая – на хаотический. В случае гамильтоновой системы с N степенями свободы траекторию характеризует N пар показателей; в каждой паре показатели равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Для определения характера движения достаточно вычислить максимальный ХПЛ (МХПЛ). Движение системы является непредсказуемым на интервале времени, задаваемом величиной, обратной ее МХПЛ.

Бенеттин и др. построили зависимость МХПЛ от энергии E системы с гамильтонианом (1) [4, рис.7]. Анализируя эту зависимость, Бенеттин и др. пришли к выводу, что она описывается экспонентой. Данный результат широко известен; он вошел в монографию Лихтенберга и Либманна, посвященную нелинейной и хаотической динамике [2, рис.5.8].

Следует отметить, что этот результат был получен, исходя из довольно ограниченных численных данных. Бенеттин и др. построили 28 точек кривой на всем изучавшемся ими промежутке изменения энергии. Величина интервала времени в $t = 2 \cdot 10^4$ единиц времени системы с гамильтонианом (1), на котором они проводили интегрирование для каждой точки, согласно приведенным ниже оценкам, совершенно недостаточна для получения верных асимптотических значений МХПЛ. В настоящей работе мы строим зависимость с существенно более высоким (более чем в сто раз) разрешением по энергии. При этом значения МХПЛ определяются на значительно более протяженных интервалах времени, до $t = 10^7$. Использование таких времен позволяет надежно верифицировать получаемые значения МХПЛ.

Для вычисления МХПЛ мы применяем два метода: метод “теневого траектории” (использовавшийся и авторами [4]) и так называемый HQR-метод.

Суть первого заключается в следующем (подробное описание и обсуждение см., например, в [2, 4, 5]). Возьмем две близкие траектории фазового пространства – “опорную” и “теньевую”, расстояние между которыми в начальный момент времени равно d_0 . Приближение МХПЛ на интервале времени в n шагов вычисляется по формуле:

$$L_n = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d_{i-1}}, \quad (2)$$

¹⁾e-mail: iis@gao.spb.ru

где d_i – расстояние между опорной и теневой траекториями на i -м шаге, Δt – величина шага по времени. При вычислении необходимо периодически выполнять перенормировку расстояния между опорной и теневой траекториями, чтобы оно оставалось относительно малым.

Мы полагаем начальные значения трех переменных при всех значениях энергии одними и теми же: $q_1 = 0$, $q_2 = -0.15$, $p_2 = 0$. Величина p_1 при заданной величине энергии E определяется из уравнения (1). Как и в [1, 4], берем значения $p_1 \geq 0$. Начальное смещение теневой траектории относительно опорной проводится по переменной q_2 и принято равным $d_0 = 10^{-7}$. Шаг итерации $\Delta t = 0.1$. Перенормировка длины вектора смещения от опорной траектории к теневой осуществляется при каждой итерации. Величина энергии варьируется от 0.0841 до 0.1666 (то есть до предельного значения $E = 1/6$) с шагом $2 \cdot 10^{-5}$. Выбор минимального значения определяется невозможностью найти хаотическую область при дальнейшем уменьшении E , так как хаотический слой становится слишком узким; выбор максимального значения – тем, что движение системы перестает быть осцилляционным. Интегрирование уравнений движения проводится при помощи интегратора Дормана–Принса [6], реализующего метод Рунге–Кутты 8-го порядка.

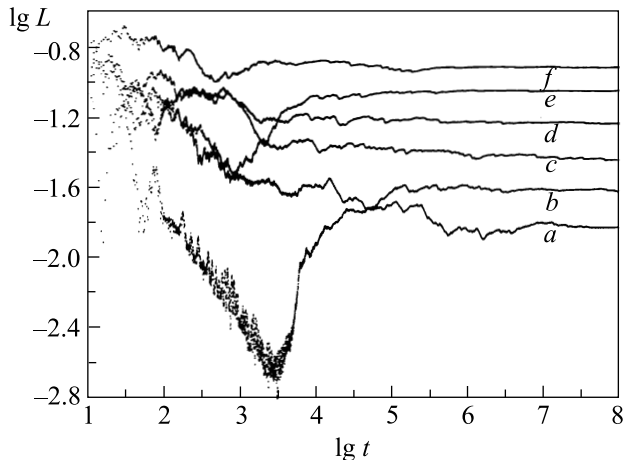


Рис.1. Зависимость текущего значения МХПЛ системы (1) от времени при различных значениях энергии; $\lg E = -1.025$ (a), -0.975 (b), -0.925 (c), -0.875 (d), -0.825 (e), -0.780 (f)

Вычисление МХПЛ проводится на одном и том же множестве начальных данных четыре раза: на интервалах времени $t = 10^4$, 10^5 , 10^6 и 10^7 . Увеличение t позволяет наглядно разделить хаотические и регулярные орбиты и определить, достаточно ли

время вычисления для определения точных значений МХПЛ: текущее значение МХПЛ должно выйти на плато и не меняться при увеличении времени счета. Наши численные эксперименты показывают, что время выхода на плато составляет $t = 10^5 \div 10^7$. Это время увеличивается с уменьшением энергии (рис.1).

На рис.2 в логарифмических координатах представлена полученная зависимость

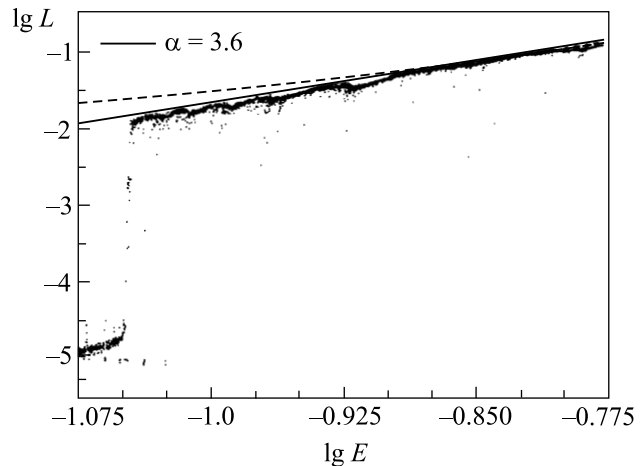


Рис.2. Зависимость МХПЛ от энергии. Сплошной линией показана степенная аппроксимация; штриховой – функция Бенеттина и др. [4]

МХПЛ L от энергии E при максимальном времени интегрирования $t = 10^7$. Также нанесен график степенной функции $L \propto E^\alpha$ (в логарифмических координатах это прямая линия $\lg L = \alpha \lg E + \beta$), аппроксимирующей данные по верхней грани на участке, где наблюдаемая зависимость представляется прямой. Выбор этого участка и аппроксимация по верхней грани проводились визуально и являются приближенными. Для $t = 10^4$, 10^5 , 10^6 , 10^7 получены значения $\alpha = 2.7$, 3.0 , 3.4 , 3.6 , $\beta = 1.26$, 1.46 , 1.78 , 1.95 , соответственно. Аппроксимация проводилась по верхней грани, а не по средним значениям, по той причине, что на наблюдаемый вид зависимости серьезное влияние оказывает так называемый “эффект прилипания”. Особенностью хаотического движения в гамильтоновой динамике является гамильтонова перемежаемость [7]: траектория может на долгое время “прилипнуть” к границам хаотической области, где характер движения близок к регулярному. При этом локальные значения ХПЛ малы, что сказывается на окончательных оценках ХПЛ [7]. Наблюдаемые на рис.2 “выбросы вниз” объясняются именно эффектом прилипания. Также в зависимости четко проявляется тонкая структура, обусловленная поглощением главной хаотической областью хао-

тических слоев краевых резонансов при увеличении энергии.

На рис.2 дополнительно нанесена экспоненциальная аппроксимационная функция Бенеттина и др. [4]: $L = 0.0034 \exp(22E)$. Видно, что она дает удовлетворительное описание реальной зависимости лишь при больших значениях энергии.

Вторым методом вычисления МХПЛ, принятым нами, является HQR-метод фон Бремена и др. [8]. Этот метод позволяет вычислять весь спектр показателей Ляпунова. Он основан на QR-разложении матрицы тангенциального отображения с использованием преобразования Хаусхолдера, что отражено в названии метода. Базовые алгоритмы реализованы в [9]. Мы применяем модернизированный алгоритм [10], отличие которого от приведенного в [9] состоит в том, что матрица тангенциального отображения вычисляется путем совместного интегрирования исходной системы и системы уравнений в вариациях.

В случае системы Хенона – Хейлеса второй элемент ляпуновского спектра должен быть равен нулю, поскольку система имеет две степени свободы и автономна. При увеличении времени, на котором вычисляются ХПЛ, кривая зависимости вычисленного МХПЛ от энергии стабилизируется, в то время как кривая зависимости вычисленного значения второго элемента ляпуновского спектра от энергии (приблизительно горизонтальная прямая) переносится вниз, асимптотически стремясь к нулевому уровню. Зависимость ХПЛ от энергии, полученная HQR-методом при максимальном времени интегрирования $t = 10^7$, представлена на рис.3. Начальные условия те же, что и принятые выше при вычислениях методом теневой

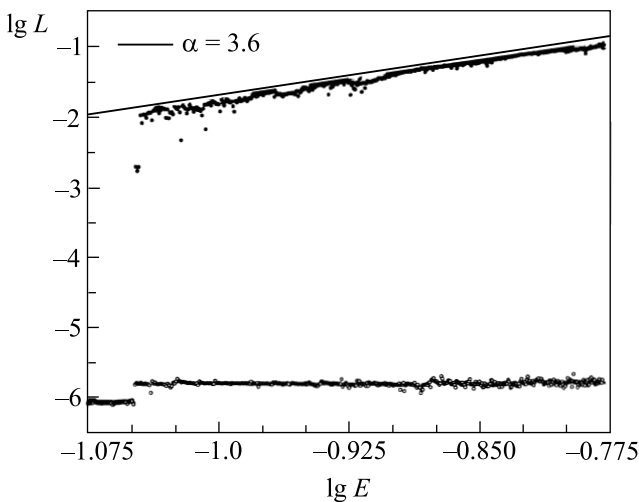


Рис.3. Зависимость спектра ХПЛ от энергии. Приведена степенная аппроксимация МХПЛ

траектории. На рис.3, как и на рис.2, нанесена степенная аппроксимация. Для $t = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ получены значения $\alpha = 2.75, 3.1, 3.5, 3.6$, $\beta = 1.32, 1.55, 1.88, 1.90$, соответственно.

На рис.4 показана зависимость вычисленных обоими методами значений α и β от времени интегри-

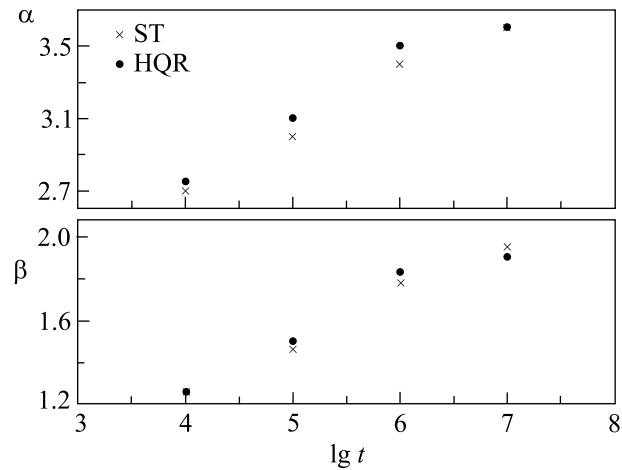


Рис.4. Зависимость вычисляемых значений α и β от времени интегрирования: крестики – метод теневой траектории, кружки – HQR-метод

рования. Данные, полученные HQR-методом, определенно показывают выход на плато при больших временах интегрирования. Для данных, полученных методом теневой траектории, эта тенденция менее выражена. Однако HQR-метод, несомненно, является более точным; поэтому значения $\alpha = 3.6$, $\beta = 1.9$ с точностью 0.1 можно считать окончательными.

Рассмотрим, меняется ли характер зависимости “МХПЛ – энергия” при обобщении гамильтониана (1). Система общего вида с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 \quad (3)$$

при $\varepsilon = 1$ совпадает с системой Хенона – Хейлеса (1), а при значениях ε , близких к нулю, является близкой к интегрируемой [3]. На рис.5 приведена полученная нами методом теневой траектории ($t = 10^6$) зависимость МХПЛ от энергии для $\varepsilon = 0.5, 0.8$ и 1.0 . Из рисунка видно, что при уменьшении ε кривая зависимости смещается вниз параллельно самой себе. Ее характер, таким образом, остается прежним: это степенная функция $\lg L = \alpha \lg E + \beta$ с одинаковым показателем $\alpha = 3.4$. Можно предположить, что при увеличении t окончательным значением α будет 3.6, как в случае гамильтониана (1). Значения параметра β для прямых на рис.5 равны 1.78, 1.45 и 1.18.

Помимо ХПЛ, важнейшей характеристикой хаотического движения является относительная мера μ

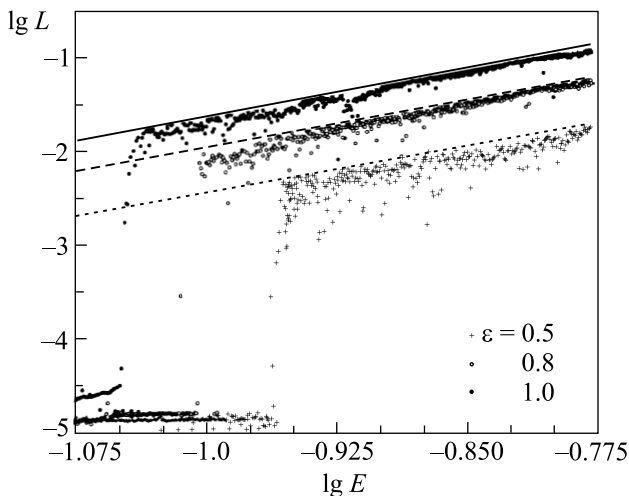


Рис.5. Зависимость МХПЛ от энергии системы с обобщенным гамильтонианом (3): крестики — $\varepsilon = 0.5$, кружки — $\varepsilon = 0.8$, точки — $\varepsilon = 1$

хаотической компоненты фазового пространства, если она определена. Хенон и Хейлес [1] выполнили вычисление относительной площади $\bar{\mu} = 1 - \mu$, занимаемой регулярными траекториями системы с гамильтонианом (1) на плоскости сечения (q_2, p_2) при $q_1 = 0$ и заданном значении E (при этом p_1 фиксируется уравнением (1) по заданному значению E ; берутся значения $p_1 \geq 0$). Построенная ими зависимость этой площади от энергии представлена в [1, рис.7]. Этот график получил широкую известность; он, в частности, приведен в [11]. Как и в случае зависимости МХПЛ от энергии [4], он построен на основе весьма ограниченных численных данных. В настоящей работе для вычисления μ мы используем три независимых метода.

Первый метод предложен Хеноном и Хейлесом [1]. Он состоит в следующем. На поверхности сечения фазового пространства выбираются начальные значения переменных (q_2, p_2) , и проводится интегрирование уравнений движения для двух близких траекторий — основной и теневой. В конечной точке интегрирования вычисляется расстояние между этими траекториями. В том случае, если начальные данные соответствуют хаотической компоненте, расстояние между основной и теневой траекториями должно возрастать экспоненциально со временем. В случае регулярной траектории экспоненциального роста нет. Таким образом, хаотические и регулярные траектории можно отличить друг от друга. Задается сетка начальных данных, и по относительному количеству хаотических траекторий на сетке определяется относительная мера хаотической области.

Начальные условия принимаем следующими: $q_1 = 0$, а q_2, p_2 задаются на равномерной сетке в прямоугольнике: $q_2 \in [-0.6, 1.1]$, $p_2 \in [-0.7, 0.7]$; значение p_1 определяется из уравнения (1) при заданных q_1, q_2, p_2 и E . Как и в случае вычисления МХПЛ, начальное смещение теневой траектории относительно основной проводится по q_2 ; оно принято равным 10^{-7} . Для разделения траекторий на хаотические и регулярные строится распределение расстояний между конечными фазовыми точками траекторий. Посредством анализа модальной структуры распределения определяется критерий для данного разделения. Аналогичная методика, но для МХПЛ, применялась в [5]. Относительная площадь μ , занимаемая хаотической компонентой на сечении, определяется по формуле $\mu = n_{ch}/n$, где n_{ch} есть количество точек сетки, задающих хаотические траектории, n — количество всех точек сетки, попадающих в область допустимого движения.

Второй метод отличается от первого тем, что на той же сетке начальных данных вычисляются не конечные расстояния между траекториями, а МХПЛ. Вычисление МХПЛ проводится методом теневой траектории. Строится распределение значений МХПЛ. Хаотические и регулярные траектории разделяются путем анализа модальной структуры распределения значений МХПЛ (подробнее см. [5]), и вычисляется величина $\mu = n_{ch}/n$.

Третий метод — метод “одной траектории”. Поверхность сечения фазового пространства разбивается на одинаковые прямоугольные ячейки. Затем на сечении берутся начальные данные для хаотической траектории, и проводится ее интегрирование на длительном интервале времени. При интегрировании подсчитывается количество пересеченных траекторией ячеек сетки. Отношение количества этих ячеек к их полному количеству в области допустимого движения дает относительную площадь хаотической компоненты. Данный метод впервые был применен Б.В. Чириковым [12] при анализе фазового пространства стандартного отображения.

Вычисления первым, вторым и третьим методами проведены нами соответственно на сетках 200×200 , 50×50 и 400×400 узлов; траектории интегрируются соответственно на интервалах времени $t = 10^3$, $t = 10^4$ и $t = 10^8$. В последнем случае траектория одна, тогда как в первых двух число траекторий равно числу узлов сетки.

Результаты вычислений площади регулярной компоненты $\bar{\mu}$ всеми тремя методами представлены на рис.6. Видно, что метод Хенона–Хейлеса дает завышенные оценки $\bar{\mu}$ в сравнении с методом анализа

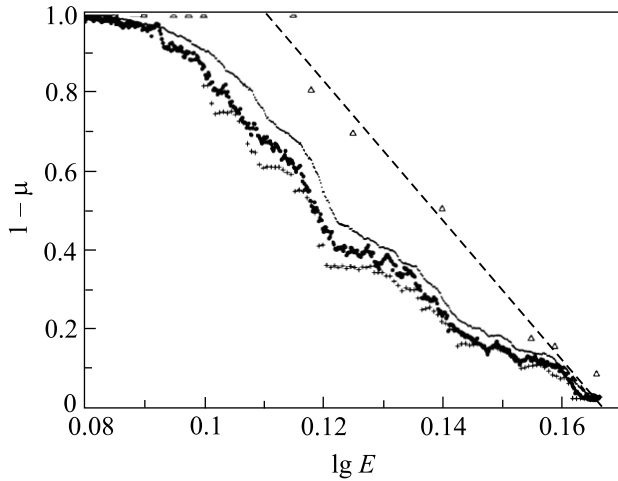


Рис.6. Относительная мера регулярной компоненты фазового пространства системы (1) в зависимости от энергии. Результаты вычисления первым методом показаны точками, вторым – кружками, третьим – крестиками. Данные [1] нанесены в виде треугольников, линейная аппроксимация [4] этих данных – в виде штриховой линии

распределения МХПЛ и методом “одной траектории”. Наиболее точными представляются данные, полученные третьим методом, так как этот метод позволил использовать наиболее тонкое разбиение фазового пространства. На рис.7 показана зависимость от энергии относительной меры хаотической

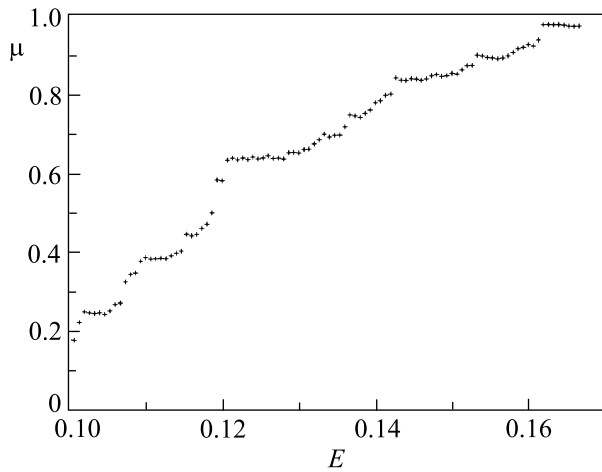


Рис.7. Относительная мера хаотической компоненты фазового пространства системы (1) в зависимости от энергии

компоненты, полученная этим методом.

На рис.6 дополнительно нанесены данные [1] и линейная аппроксимационная функция, принятая для расчетов Бенеттином и др. [4] на основе этих данных:

$\bar{\mu} = 1 - 17.6(E - 0.11)$ для $0.11 < E < 1/6$. Они сильно отклоняются от реальных значений $\bar{\mu}$, на некоторых участках более чем в два раза.

На основе полученных численных данных о МХПЛ и относительной площади хаотической компоненты мы можем вычислить зависимость динамической энтропии системы от энергии. Такая зависимость была построена в работе Бенеттина и др. [4]. Согласно [4], динамическая энтропия вычисляется по формуле $h = L\mu$.

Для нахождения динамической энтропии используем значения МХПЛ, вычисленные методом теневой траектории на максимальном интервале времени интегрирования $t = 10^7$ (если взять данные НQR-метода, то результат практически не меняется). В качестве μ берем значения, полученные методом “одной траектории”, как наиболее надежные. На рис.8 приведена полученная зависимость и ее аппроксимация экспоненциальной функцией: $h = h_0 + A \exp(kE)$,

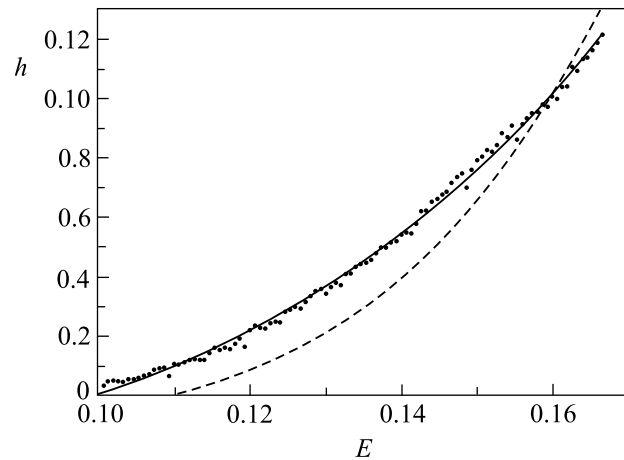


Рис.8. Зависимость динамической энтропии системы (1) от энергии. Аппроксимация экспоненциальной функцией. Дополнительно нанесена зависимость Бенеттина и др. [4] (штриховая линия)

где $h_0 = -0.046 \pm 0.003$, $A = 0.0067 \pm 0.0008$, $k = 19.36 \pm 0.66$. Значения параметров приводятся с их стандартными ошибками. Полученную зависимость также хорошо аппроксимирует функция $h = AE^k / (B^k + E^k)$, где $A = 0.190 \pm 0.006$, $B = 0.157 \pm 0.001$, $k = 7.97 \pm 0.15$. Обращает на себя внимание близость k к целому числу, то есть практически мы имеем рациональную функцию. Коэффициент корреляции в случае экспоненциальной аппроксимации составляет $R \approx 0.998$, в случае аппроксимации рациональной функцией $R \approx 0.999$. На рис.8 дополнительно нанесена функция Бенеттина и др. [4]: $h = 0.060(E - 0.11) \exp(22E)$ для $0.11 < E < 1/6$.

Видно, что она дает описание наблюдаемой зависимости, близкое к реальному лишь при высоких значениях E .

Итак, из анализа построенной нами двумя различными методами (методом теневой траектории и HQR-методом) зависимости “МХПЛ–энергия” в задаче Хенона–Хейлеса следует вывод, что эта зависимость не является экспоненциальной, а близка к степенной с показателем степени ≈ 3.6 . Для обобщенного гамильтониана (3) зависимость в исследованных нами случаях $\varepsilon = 0.5, 0.8$ и 1.0 также является степенной с близким значением показателя степени. Зависимость “мера хаотической компоненты–энергия”, построенная нами тремя независимыми методами, также в значительной мере уточняет имевшиеся до сих пор представления: различия с имевшимися ранее оценками μ достигают 100% и больше. Она является разрывной и не описывается простой аппроксимирующей функцией. Зависимость “динамическая энтропия–энергия”, в согласии с [4], может быть описана экспонентой, но так же хорошо, если не лучше, ее описывает и частный вариант рациональной функции.

Авторы благодарят В. В. Куприянова за обсуждение и консультации. Работа выполнена при под-

держке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 03-02-17356).

1. M. Hénon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
2. А. Лихтенберг и М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, М.: Мир, 1984.
3. М. Табор, *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*, М.: Эдиториал УРСС, 2001.
4. G. Benettin, L. Galgani, and J.-M. Strelcyn, *Phys. Rev.* **A14**, 2338 (1976).
5. А. В. Мельников и И. И. Шевченко, *Астрон. вестн.* **32**, 548 (1998).
6. E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Berlin: Springer-Verlag, 1987.
7. I. I. Shevchenko, *Phys. Lett.* **A241**, 53 (1998).
8. H. F. von Bremen, F. E. Udvardia, and W. Proskurowski, *Physica* **D101**, 1 (1997).
9. I. I. Shevchenko and V. V. Kouprianov, *Astron. & Astrophys.* **394**, 663 (2002).
10. В. В. Куприянов и И. И. Шевченко, готовится к печати (2003).
11. И. Кинг, *Введение в классическую звездную динамику*, М.: Эдиториал УРСС, 2002.
12. B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).