

ДВУМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

*В.К.Мезенцев, С.Л.Мушер, И.В.Рыженкова, С.К.Турицын**

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН
630090 Новосибирск, Россия*

**Институт теоретической физики I Университета им. Г.Гейне
40225 Дюссельдорф, Германия*

Поступила в редакцию 13 октября 1994 г.

В рамках двумерного дискретного нелинейного уравнения Шредингера исследована структура и динамика двумерных дискретных солитонов. Показано, как дискретность модифицирует динамику соответствующей двумерной континуальной модели. Обсуждается квази-коллапсный механизм конденсации энергии в дискретные состояния большой амплитуды.

Наша работа посвящено исследованию изменений, вносимых эффектами дискретности в поведение нелинейных систем. Дискретность может существенно изменять структуру и влиять на устойчивость локализованных состояний [1-4] и топологических возбуждений [5], оказывать нетривиальное воздействие на модуляционную неустойчивость [3,6], на явления волнового коллапса [7,8] и другие свойства континуальных моделей. Дискретные системы демонстрируют более богатую динамику по сравнению с соответствующими непрерывными моделями, потому что последние описывают лишь предельные случаи дискретных задач. Необходимо отметить, что мы говорим здесь не о дискретизации непрерывных систем, а о *принципиально дискретных проблемах*. Помимо чисто фундаментального физического интереса, дискретные модели представляют интерес и с точки зрения практических приложений, таких как системы связанных оптических световодов [3,9-11]; моделей переноса энергии в биофизических системах, предложенных Давыдовым и Холстейном; дискретной модели агрегаций Шайбе [12]; электрических решеток [13,14]; систем, моделирующих динамику ДНК [9,15-17] и т.д. Следует отметить, что даже в одномерном случае дискретные модели демонстрируют достаточно сложное поведение. Одномерные локализованные состояния в дискретных нелинейных системах являются объектом интенсивных исследований в последние годы (см., например, [1-4, 8-10, 15-20]). Менее изучены многомерные модели [13, 21-23]. Цель данной статьи – исследование двумерных локализованных структур в рамках дискретного нелинейного уравнения Шредингера. Это уравнение и близкие к нему по структуре описывают двумерные системы связанных волоконных световодов, динамику агрегаций Шайбе, динамику солитонов огибающих в нелинейных решетках. В данной работе, однако, мы будем рассматривать это уравнение не с точки зрения конкретных приложений, а как пример нелинейной дискретной системы, позволяющей выявить общие закономерности динамики двумерных локализованных структур. Мы демонстрируем новый механизм возникновения узких состояний большой амплитуды в многомерных дискретных моделях. Будет показано также, как дискретность влияет на устойчивость солитонов и явление коллапса.

Основное уравнение модели может быть записано в виде

$$i \frac{\partial \Psi_{n,m}}{\partial t} + \Psi_{n+1,m} + \Psi_{n-1,m} + \Psi_{n,m+1} + \Psi_{n,m-1} - 4\Psi_{n,m} + 2|\Psi_{n,m}|^2 \Psi_{n,m} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет гамильтоновскую структуру

$$i \frac{\partial \Psi_{n,m}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi_{n,m}^*}, \quad (2)$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_{n,m} |\Psi_{n,m} - \Psi_{n-1,m}|^2 + \sum_{n,m} |\Psi_{n,m} - \Psi_{n,m-1}|^2 - \sum_{n,m} |\Psi_{n,m}|^4 = \text{const}. \quad (3)$$

Кроме того, уравнение (1) сохраняет величину $P = \sum |\Psi_{n,m}|^2$.

Чтобы показать, что свойства нелинейной дискретной системы могут зависеть от размерности задачи, рассмотрим вначале континуальный предел уравнения (1). Он может быть получен для "широких" распределений, вовлекающих много мод. Вводя координату x в "n"-направлении и y в "m"-направлении, можно получить континуальное приближение для уравнения (1):

$$iU_t + U_{xx} + U_{yy} + 2|U|^2 U = 0. \quad (4)$$

Это хорошо известное двумерное уравнение Шредингера, которое описывает, в частности, стационарную самофокусировку световых пучков. Напомним кратко основные свойства уравнения (4). Упомянутые выше интегралы движения имеют непрерывные аналоги

$$P = \int |U|^2 dx dy \quad \text{и} \quad H = \int (|U_x|^2 + |U_t|^2) dx dy - \int |U|^4 dx dy = I_1 - I_2.$$

Для (4) имеет место так называемая теорема вириала [24]:

$$\partial_t^2 \int (x^2 + y^2) |U|^2 dx dy = 8H. \quad (5)$$

Поскольку H - сохраняющаяся величина, это уравнение можно решить: $\langle R^2 \rangle = \int (x^2 + y^2) |U|^2 dx dy = 4Ht^2 + At + B$; $A = \frac{d\langle R^2 \rangle}{dt} \Big|_{t=0}$ и $B = \langle R^2 \rangle \Big|_{t=0}$.

Легко показать, что если интеграл H отрицателен на некотором начальном распределении, то $U(t, x, y)$ становится сингулярным за конечное время. Критерий коллапса может быть переформулирован в виде критерия на величину P (мощность пучка в оптике):

$$H = I_1 - I_2 \geq I_1 - \frac{P}{P_{cr}} I_1 = I_1 \left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right); \quad (6)$$

здесь использовано известное неравенство

$$\int |U|^4 dx dy \leq \frac{P}{P_{cr}} \int (|U_x|^2 + |U_y|^2) dx dy, \quad (7)$$

где P_{cr} есть значение интеграла P для основного солитонного решения уравнения (4). Отсюда очевидно, что при $P < P_{cr}$ без специальной "подфокусировки"

исходного волнового пакета коллапс не происходит. В случае $P > P_{cr}$ H может быть отрицателен и можно показать, что тогда происходит образование особенности волнового поля за конечное время. В процесс самофокусировки асимптотически захватывается критическая мощность $P = P_{cr}$. Важно подчеркнуть, что в дискретном случае формирование особенности невозможно из-за сохранения интеграла $P = \sum_{n,m} |\Psi_{n,m}|^2$. Как следствие сжатия на начальной стадии, возможна конденсация всей энергии в нескольких модах. Процессы самолокализации энергии, первоначально распределенной по нелинейной дискретной системе, изучались в работах [7,8,11,15]. Интерес к этой проблеме вызван, в частности, той важной ролью, которую могут играть узкие локализованные состояния большой амплитуды в динамике ДНК [16,17] и в нелинейной оптике [11]. В одномерных дискретных системах типичный сценарий возникновения узких состояний, по-видимому, следующий. На первой стадии имеет место процесс кластеризации начальных возмущений в результате развития модуляционной неустойчивости. На этой стадии появляются солитоны с малой амплитудой. На следующей стадии неупругие столкновения солитонов ведут к передаче энергии от солитонов меньшей амплитуды к более крупным. На заключительной стадии формируются самолокализованные состояния большой амплитуды [15]. Следует отметить, что в многомерных нелинейных системах волновой коллапс является типичным вариантом волновой динамики в отличие от одномерного случая. Возникновение особенности в многомерных континуальных моделях соответствует эффекту конденсации всей энергии в нескольких модах в нелинейных дискретных системах. Этот канал локализации энергии является достаточно общим в многомерных системах и мало чувствителен к деталям рассматриваемой модели. Таким образом, для множества нелинейных дискретных систем квази-коллапс играет роль механизма формирования очень узких самолокализованных состояний [7,8,25] из первоначально широких волновых пакетов.

Рассмотрим теперь стационарные решения основной модели (1). Определим их как $\Psi_{n,m} = F_{n,m} \exp(i\lambda^2 t)$, где огибающая $F_{n,m}$ задается соотношением

$$F_{n+1,m} + F_{n-1,m} + F_{n,m+1} + F_{n,m-1} - (4 + \lambda^2)F_{n,m} + 2|F_{n,m}|^2 F_{n,m} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение можно рассматривать как нелинейную алгебраическую задачу на собственные значения для λ^2 и $F_{n,m}$. Солитонные решения возникают в результате баланса между нелинейными и дисперсионными эффектами, модифицированными за счет дискретности. В этом сообщении в основном проанализирован случай конечного числа связанных уравнений с нулевыми или периодическими граничными условиями $\Psi_{-N,m} = \Psi_{N,m}$ и $\Psi_{n,-M} = \Psi_{n,M}$. Для доказательства существования решений уравнения (8) достаточно рассмотреть задачу минимизации H при фиксированном P (см. также [8,9]). Преимущество этого подхода в том, что одновременно доказывается и устойчивость найденных решений относительно возмущений, сохраняющих P . Ограниченность гамильтониана H следует из цепочки неравенств

$$H = \sum_{n,m} |\Psi_{n,m} - \Psi_{n-1,m}|^2 + \sum_{n,m} |\Psi_{n,m} - \Psi_{n,m-1}|^2 - \sum_{n,m} |\Psi_{n,m}|^4 \geq -\max |\Psi_{n,m}|^2 P \geq -P^2. \quad (9)$$

В случае конечных N и M минимум гамильтониана достигается на некотором решении, очевидно, устойчивом относительно возмущений, сохраняющих P .

Как отмечалось в [8], это не означает существования решения для произвольного (непрерывного) λ^2 , поскольку λ^2 суть множитель Лагранжа, подлежащий определению. Этот факт следует из отсутствия масштабной инвариантности, которая имеет место в непрерывном пределе.

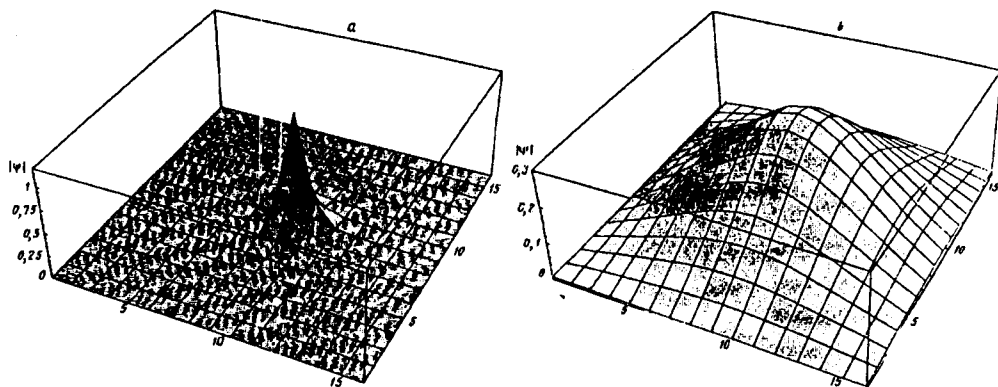


Рис.1.

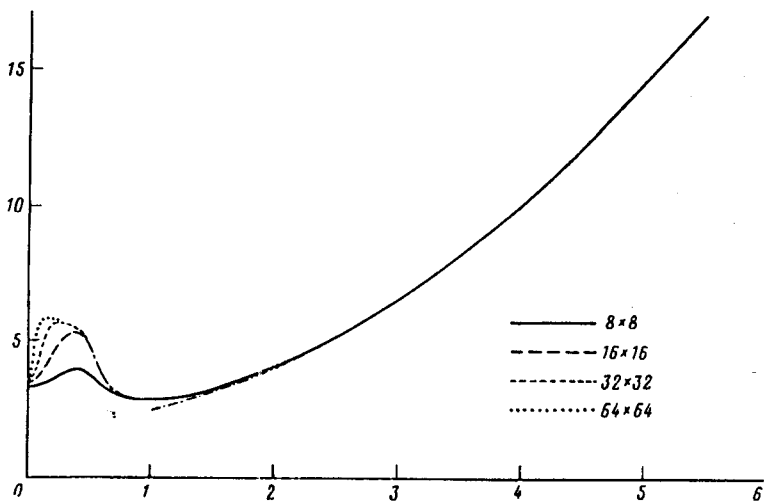


Рис.2. Интеграл P как функция λ . Штрих-пунктирная линия соответствует параболе $P = \lambda^2/2 + 2$

Один тип дискретных солитонов, а именно, очень узкое симметричное состояние, можно найти с помощью теории возмущений. Предположим, что почти вся энергия симметрично локализована лишь в нескольких модах и $|F_{0,0}| \gg |F_{\pm 1,0}|, |F_{0,\pm 1}|$. Центральная мода здесь обозначена как $F_0 = F_{0,0}$. Из-за симметрии задачи можно записать $F_{\pm 1,0} = F_{0,\pm 1} = F_1$. Тогда для центральной моды имеем уравнение

$$4F_1 - (\lambda^2 + 4)F_0 + 2|F_0|^2 F_0 = 0, \quad (10)$$

а для ближайших соседей

$$F_0 - (\lambda^2 + 4)F_1 + 2|F_1|^2 F_1 + 3F_2 = 0. \quad (11)$$

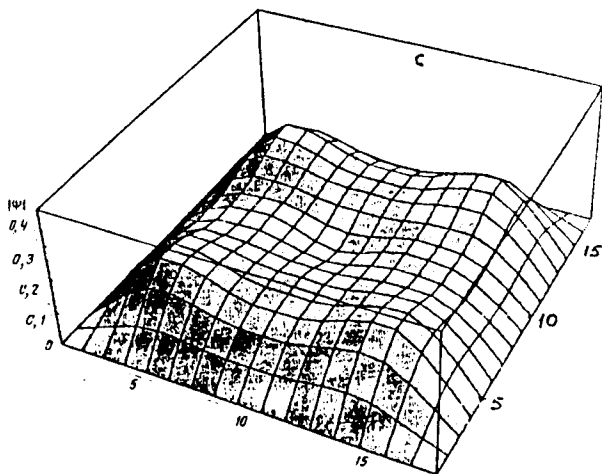
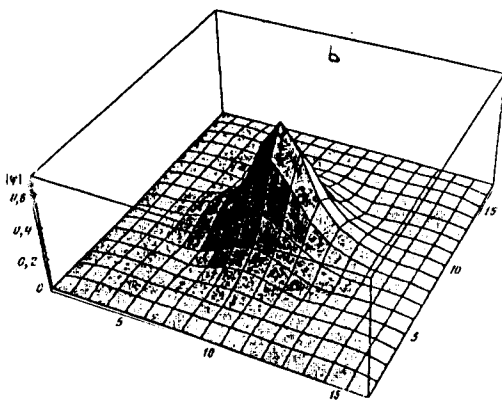
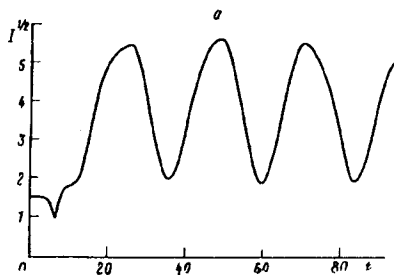


Рис.3. Развитие неустойчивости дискретного двумерного солитона: а - временная эволюция "вириала" $I = \sum_{m=-N/2, n=-N/2}^{m=N/2, n=N/2} (m^2 + n^2) |\Psi_{mn}|^2 / P$; б - состояние, соответствующее минимуму I ; в - состояние, соответствующее максимуму I

Здесь через F_2 обозначены малые поправки, связанные с влиянием более далеких соседей. В рассматриваемом нами пределе больших λ^2 эти уравнения приводят к

$$F_0 \approx \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\lambda} - \frac{2\sqrt{2}}{\lambda^3} + \dots; \quad F_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} + \dots \quad (12)$$

В данном пределе интеграл $P \approx \lambda^2/2 + 2$. Эти выражения, полученные из теории возмущений, превосходно совпадают с результатами численного анализа. На рис.1 представлены два типа дискретных солитонов. Приближенное решение (12), полученное для большого значения λ , показано на рис.1а.

В пределе малых λ решение стремится к основному состоянию непрерывной задачи, широкому распределению, включающему в себя много мод. Такой дискретный солитон, отвечающий значению $\lambda = 0,02$, представлен на рис.1б.

Основным фактором, определяющим физическую значимость дискретных солитонов, является их устойчивость. Как и в непрерывном случае, достаточно надежные качественные выводы могут быть получены из рассмотрения важной характеристики нелинейной системы - зависимости P от параметра λ [8,26]. На рис.2 представлены кривые $P(\lambda)$ для нескольких значений размера дискретного массива $N = M$, большим значениям λ соответствуют узкие распределения

большой амплитуды. Видно, что начиная с $\lambda \approx 1$, $P(\lambda)$ практически совпадает с асимптотикой, полученной выше, и не зависит от N . С увеличением N максимум распределения в области малых λ приближается к константе, отвечающей непрерывному случаю. В работе [8] было показано, что для одномерного дискретного нелинейного уравнения Шредингера знак выражения $dP/d\lambda$ играет решающую роль для устойчивости солитонов. Мы полагаем, что мощный метод исследования устойчивости, развитый в [8], будет применим и к двумерным системам. Это подтверждает проведенное нами численное моделирование динамики дискретных солитонов. Солитоны, соответствующие положительному знаку $dP/d\lambda$, проявляют тенденцию к устойчивой динамике в отличие от солитонов с отрицательным знаком. Это иллюстрируют рис.1 и рис.3. На рис.1 показано стационарное решение, которое сохраняет свою форму без изменений вплоть до времени $t=40$. Рис.3 демонстрирует развитие неустойчивости солитона в области убывания $P(\lambda)$. Видно, что нелинейная стадия неустойчивости приводит к образованию объектов типа "бризера" или "пульсона". Нетривиальная динамика этих структур на больших временах будет рассмотрена позднее.

Важной новой чертой, обусловленной влиянием дискретности, является существование устойчивых солитонов и неустойчивых состояний. Интересно отметить, что эффекты дискретности стабилизируют основное состояние соответствующей континуальной задачи (как известно, слабо неустойчивое).

В заключение проанализирована структура основных состояний двумерного дискретного нелинейного уравнения Шредингера. Было определено, как эффекты дискретности останавливают коллапс, имеющий место в непрерывном случае. Неустойчивость широкого начального распределения на нелинейной стадии приводит к локализации энергии в нескольких модах за конечное время. Такой процесс может являться механизмом формирования узких состояний большой амплитуды в многомерных дискретных системах.

Мы хотели бы выразить свою признательность S.Takeno, M.Remoissenet и Ю.Кившарю за полезные обсуждения. Выполнение этой работы частично поддерживалось грантами INTAS Grant-93-139 и ISF Grant RCF000.

-
1. A.C.Scott and L.Macneil, Phys. Lett. **A98**, 87 (1983).
 2. A.J.Sievers and S.Takeno, Phys. Rev. Lett. **61**, 970 (1988).
 3. D.N.Christodoulides and R.I.Joseph, Opt. Lett. **13**, 794 (1988).
 4. T.Dauxois, M.Peyrard and C.R.Willis, Phys. Rev. **E48**, 4768 (1993).
 5. R.Boesch and C.R.Willis, Phys. Rev. **B39**, 361 (1989).
 6. Yu.S.Kivhar and M.Peyrard, Phys. Rev. **A46**, 3198 (1992).
 7. O.Bang, J.J.Rasmussen and P.L.Christiansen, Nonlinearity **7**, 205 (1993).
 8. E.W.Laedke, K.H.Spatschek and S.K.Turitsyn, Phys. Rev. Lett. **73**, 1055 (1994).
 9. C.Schmidt-Hattenberger, U.Trutschel, R.Muschall and F.Lederer, Opt. Comm. **89**, 473 (1992); Opt. and Quant. Electr. **25**, 185 (1993).
 10. P.E.Langridge and W.J.Firth, Opt. and Quant. Electr. **24**, 1315 (1992); M.I.Molina and G.P.Tsironis, Physica **D65**, 267 (1993).
 11. A.B.Aceves, C.De Angelis, A.M.Rubenchik, and S.K.Turitsyn, Opt. Lett. **19**, 329 (1994).
 12. P.L.Christiansen, O.Bang, S.Pagano and G.Vitiello, Nanobiology **1**, 229 (1992).
 13. Л.А.Островский, В.В.Папко, Ю.А.Степанянц, ЖЭТФ **51**, 417 (1980).
 14. M.Remoissenet and B.Michaux, in *Electrical Transmission Lines and Soliton Propagation in Physical Systems* ed. G.Maugin (Longman, 1990).
 15. T.Dauxois and M.Peyrard, Phys. Rev. Lett. **70**, 3935 (1993).

16. M.Peyrard and A.R.Bishop, Phys. Rev. Lett. **62**, 2755 (1989).
17. T.Dauxois, M.Peyrard and A.R.Bishop, Phys. Rev. **E47**, 684 (1993).
18. M.J.Ablowitz and J.F.Ladik, Stud. Appl. Math. **55**, 213 (1976).
19. J.C.Eilbeck, P.S.Lomdahl, and A.C.Scott, Physica **D16**, 318 (1985).
20. Yu.S.Kivshar, Phys. Lett. **A173**, 172 (1993); Phys. Rev. Lett. **70**, 3055 (1993).
21. S.Takeno, J. Phys. Soc. Jpn. **61**, 2823 (1992).
22. J.Pouget, M.Remoissenet and J.M.Tamga, Phys. Rev. **B47**, 14 866 (1993).
23. J.A.D.Wattis, Physica Scripta **50**, 238 (1994).
24. С.Н.Власов, В.А.Петрицев, В.И.Таланов Изв. Вузов (Радиофизика) **14**, 1353 (1971).
25. S.K.Turitsyn, Phys. Lett. **A173**, 267 (1992).
26. Н.Г.Вахитов, А.А.Колоколов, Изв. Вузов (Радиофизика) **16**, 1353 (1982).