Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.1, стр. 35 – 38 *10 июля 1983 г.*

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ *SU(2)*-РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ЗАРЯДАМИ

В.А.Сорока

Для группы *SU(2)*-расширенной суперсимметрии с центральными зарядами Z_1 и Z_2 исследована спин-изоспиновая структура неприводимых представлений, для которых значения импульса P_μ и Z_1, Z_2 удовлетворяют соотношению $P^2 = Z_1^2 + Z_2^2$.

В работах [1,2] для группы *SU(2)*-расширенной суперсимметрии с центральными зарядами был конструктивно построен гипермультиплет Фаета – Сониуса. Однако, описание всей серии представлений, которой принадлежит этот мультиплет, пока отсутствует. В настоящей работе исследована спин-изоспиновая структура неприводимых представлений этой супергруппы, для которых собственные значения квадрата импульса P^2 и центральных зарядов связаны соотношением $P^2 = Z_1^2 + Z_2^2$. Гипермультиплет Фаета – Сониуса является простейшим среди таких представлений.

Рассмотрим группу *SU(2)*-расширенной суперсимметрии [3,4] с центральными зарядами Z_1 и Z_2 [5]. Перестановочные соотношения для генераторов суперсимметрии S_α в этом случае представимы в виде [1)]

$$\{S_\alpha^k, \bar{S}_i^\beta\} = \delta_i^k (\gamma P + Z_1 + i\gamma_5 Z_2)_\alpha{}^\beta, \tag{1.1}$$

$$[M_{\mu\nu}, S_\alpha{}^k] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta S_\beta{}^k, \tag{1.2}$$

$$[I_a, S_\alpha{}^k] = \frac{1}{2} S_\alpha{}^i (\tau_0)_i^k, \tag{1.3}$$

где S_α^k подчинены *SU(2)* – ковариантному условию Майорана [4]

$$\bar{S}_k^\alpha \equiv \overline{S_\alpha^k} = \epsilon_{ki} (C^{-1}\gamma_5)^{\alpha\beta} S_\beta{}^i.$$

В соотношении (1.3) I_a – генераторы изоспина, а $(\tau_a)_i{}^k$ – изоспиновые матрицы Паули. Мы не приводим остальные хорошо известные соотношения рассматриваемой супералгебры.

В случае представлений, для которых собственные значения операторов P^2, Z_1 и Z_2 удовлетворяют соотношению $P^2 = m^2 = Z_1^2 + Z_2^2$, антикоммутатор (1.1), выраженный через величины [7]

$$Q_\alpha = (\exp \frac{i}{2} \gamma_5 \theta)_\alpha{}^\beta (S_\beta{}^1 + i S_\beta{}^2), \quad Z_1 + i\gamma_5 Z_2 = Z \exp i\gamma_5 \theta$$

в системе покоя $\mathbf{P} = 0$ и в стандартном представлении для γ-матриц приобретает вид

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = 2m\delta_\alpha{}^\beta \qquad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \tag{2.1}$$

алгебры операторов рождения $\bar{Q}^\alpha = (Q_\alpha)^+$ и уничтожения Q_α для значений $\alpha = 1,2$, тогда как матричные элементы Q_α и $(Q_\alpha)^+$ с $\alpha = 3,4$ зануляются. В (2.1) положено $Z = m$. Коммутационные соотношения ненулевых генераторов Q_α $(\alpha = 1,2)$ с генераторами момента $M^n = -\frac{1}{2} \epsilon^{onml} M_{ml}$ и I_a следуют из (1.2), (1.3)

$$[M^n, Q_\alpha] = -\frac{1}{2} (\sigma^n)_\alpha{}^\beta Q_\beta; \quad [I_+, Q_\alpha] = 0, \tag{2.2}$$

$$[I_-, Q_\alpha] = i\bar{Q}_\alpha; \qquad [I_2, Q_\alpha] = \frac{1}{2} Q_\alpha, \tag{2.2}$$

где $(\sigma^n)_\alpha{}^\beta$ – спиновые матрицы Паули, $I_\pm = I_3 \pm iI_1$ и $Q^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} Q_\beta$, $\bar{Q}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\bar{Q}^\beta$. Соотношения для $\bar{Q}^\alpha$ получаются из (2.2) эрмитовым сопряжением. Векторы суперспина Y^μ и суперизоспина T_a малой группы импульса $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$ для представлений с $m = Z$ имеют вид

$$Y^0 = 0; \quad Y^n = M^n - \frac{1}{4m}\bar{Q}^\alpha(\sigma^n)_\alpha{}^\beta Q_\beta; \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$T_- = (T_+)^+ = I_- + \frac{i}{4m}\bar{Q}^\alpha\bar{Q}_\alpha, \tag{3}$$

$$T_2 = I_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4m}\bar{Q}^\alpha Q_\alpha,$$

где по α, β подразумевается суммирование от 1 до 2 и $T_\pm = T_3 \pm iT_1 \cdot Y^n$ и T_a коммутируют с Q_α, $\bar{Q}^\alpha$ и между собой $[Y^n, T_a] = 0$, а каждый из них удовлетворяет соотношениям алгебры $SU(2)$ для момента и изоспина соответственно. В силу последнего операторы Казимира $\sum_{n=1}^{3}(Y^n)^2$ $\sum_{a=1}^{3}(T_a)^2$ имеют собственные значения для неприводимых представлений равные соответственно $Y(Y+1)$ и $T(T+1)$. Величины Y и T, принимая целые и полуцелые значения, определяют суперспин и суперизоспин неприводимого представления.

Рассмотрим содержание неприводимых представлений с $P^2 = Z^2$. Поскольку операторы Q_α, Y^3 и T_2 коммутируют между собой, то найдется такое нормированное состояние $|\Phi\rangle$, которое, являясь клиффордовым вакуумом

$$Q_\alpha|\Phi\rangle = 0 \tag{4}$$

обладает одновременно максимальными собственными значениями операторов Y^3 и T_2, равными соответственно Y и T:

$$Y^3|\Phi\rangle = Y|\Phi\rangle = 0; \quad Y_+|\Phi\rangle = 0; \quad T_2|\Phi\rangle = T|\Phi\rangle; \quad T_+|\Phi\rangle = 0, \tag{5}$$

где $Y_\pm = Y^1 \pm iY^2$. Тогда из (2.1) – (5) следует, что суперспин и суперизоспин состояния $|\Phi\rangle$ равны Y и T и в базисе, характеризуемом квантовыми числами $|S, S_3; I, I_2\rangle$, где S и S_3 – спин и его третья проекция, а I, I_2 – изоспин и его вторая проекция, это состояние имеет вид

$$|\Phi\rangle = |Y, Y; T + 1/2, T + 1/2\rangle.$$

Для данных значений суперспина Y и суперизоспина T из состояния $|\Phi\rangle$ с помощью операторов $\bar{Q}^\alpha$, $M_- = M^1 - iM^2$ и I_- – можно построить всего четыре состояния с определенными значениями спина и изоспина и различными их проекциями S_3 и I_2:

$$|Y, S_3; T + \frac{1}{2}, I_2\rangle = \left(\frac{(Y+S_3)!\,(T+I_2+{}^1/_2)!}{(2Y)!\,(Y-S_3)!\,(2T+1)!\,(T-I_2+\frac{1}{2})!}\right)^{1/2}(M_-)^{Y-S_3}(I_-)^{T-I_2+{}^1/_2}|\Phi\rangle;$$

$$|Y, S_3; T-\frac{1}{2}, I_2> = \left(\frac{2T}{T+I_2+\frac{1}{2}}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{T-I_2+\frac{1}{2}}{2T+1}\right)^{1/2}|Y, S_3; T+\frac{1}{2}, I_2> + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{4m}\left(\frac{2T+1}{T+I_2+\frac{3}{2}}\right)^{1/2}\bar{Q}^{\alpha}\bar{Q}_{\alpha}|Y, S_3; T+\frac{1}{2}, I_2+1>\right];$$

$$|Y+\frac{1}{2}, S_3; T, I_2> = \left(\frac{2T+1}{2m(2Y+1)(T+I_2+1)}\right)^{1/2}\left[\left(Y+S_3+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\bar{Q}^1|Y, S_3-\frac{1}{2};\right.$$

$$\left. T+\frac{1}{2}, I_2+\frac{1}{2}> + \left(Y-S_3+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\bar{Q}^2|Y, S_3+\frac{1}{2}; T+\frac{1}{2}, I_2+\frac{1}{2}>\right];$$

$$|Y-\frac{1}{2}, S_3; T, I_2> = \left(\frac{2T+1}{2m(2Y+1)(T+I_2+1)}\right)^{1/2}\left[\left(Y-S_3+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\bar{Q}^1|Y, S_3-\frac{1}{2};\right.$$

$$\left. T+\frac{1}{2}, I_2+\frac{1}{2}> - \left(Y+S_3+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\bar{Q}^2|Y, S_3+\frac{1}{2}; T+\frac{1}{2}, I_2+\frac{1}{2}>\right].$$

Отсюда можно найти все возможные матричные элементы спинорных генераторов Q_α и $\bar{Q}^\alpha$

Таким образом, в общем случае неприводимое представление с $P^2 = Z^2$, характеризуемое суперспином Y и суперизоспином T имеет следующую спин-изоспиновую (S, I) структуру:

$$(Y, T+\frac{1}{2}) \oplus (Y, T-\frac{1}{2}) \oplus (Y+\frac{1}{2}, T) \oplus (Y-\frac{1}{2}, T). \qquad (6)$$

Две серии представлений с более бедным, чем в общем случае (7) содержанием 1) $Y=0$: $(\frac{1}{2}, T) \oplus (0, T+\frac{1}{2}) \oplus (0, T-\frac{1}{2})$ и 2) $T=0$: $(Y+\frac{1}{2}, 0) \oplus (Y, \frac{1}{2}) \oplus (Y, -\frac{1}{2}, 0)$ имеют общее низшее представление – гипермультиплет Фаета – Сониуса, отвечающий значениям $Y=T=0$ и имеющий структуру $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Для вариантов $N=2$ расширенных теорий супергравитации и супер-Янга – Миллса представляют интерес представления $Y=3/2$, $T=0$: $(2,0) \oplus (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (1,0)$ и $Y=1/2, T=0$: $(1,0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0,0)$.

В заключение автор благодарит Д.В.Волкова за полезные обсуждения.

Литература

1. *Fayet P.* Nucl. Phys., 1976, B113, 135.
2. *Sohnius M.F.* Nucl. Phys., 1978, B138, 109.
3. *Волков Д.В., Акулов В.П.* Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, 621; Phys. Lett., 1973, B46, 109; ТМФ, 1974, 18, 39.
4. *Salam A., Strathdee J.* Nucl. Phys., 1974, B80, 499.

5. *Haag R., Lopuszanski J., Sohnius M.F.* Nucl. Phys. , 1975, **B88**, 257.
6. *Galperin A.S., Litov L.B., Soroka V.A.* J. Phys. G.: Nucl. Phys., 1983, 9, 133.
7. *Freedman D.Z.* In. Recent Development in Gravitation. eds M. Levy and S. Deser (New-York: Plenum), 1979, p.549.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
29 апреля 1983 г.