Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 1, стр. 38 – 40 *10 июля 1983 г.*

СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

А.М.Семихатов

Показано, что вид калибровочных генераторов произвольной калибровочной теории с замкнутой алгеброй определяет семейство диффузионных процессов, для которых стохастическое квантование эквивалентно квантованию в фиксированной калибровке посредством континуального интеграла, построенного в лагранжевом формализме с учетом квантовой меры.

Проблема обоснования стохастического квантования калибровочной теории по Паризи и Ву [1] состоит в построении такого диффузионного процесса, свободного от калибровки и духов, что усреднение калибровочно-инвариантных величин по его равновесному распределению совпадает с усреднением с помощью континуального интеграла, содержащего калибровку и духи. Это совпадение было установлено для удачно выбранного диффузионного процесса, с одной стороны, и для специального класса замкнутых калибровочных алгебр, с другой [1, 2].

В настоящей работе *(i)* расширен допустимый класс калибровочных алгебр, *(ii)* получены уравнения, выделяющие, при заданной алгебре, семейство диффузионных процессов, для которых *(iii)* обоснование стохастического квантования проведено с учетом квантовой меры в континуальном интеграле. Допустимые диффузии возникают как результат исключения, с использованием БРСТ-симметрии, духовых степеней свободы из некоторого согласованного с этой симметрией диффузионного процесса на многообразии *всех* полей, участвующих в построении континуального интеграла.

1. В обозначениях [3], пусть $\phi = (\phi^i)$, $i = 1, \ldots, n$ – калибровочное поле и M – (супер-) многообразие всех ϕ, на котором задано действие $\mathcal{S}(\phi)$, аннулируемое калибровочными генераторами R_α $(\partial_r \mathcal{S}/\partial\phi^i R^i_\alpha = 0,\ \alpha = 1, \ldots, m)$, которые образуют замкнутую алгебру со структурными функциями $f^\alpha_{\beta\gamma}(\phi)$. Формализация БРСТ-симметрии достигается следующим образом [3]. Расширим пространство полей до супермногообразия $\mathcal{M}$ с координатами $\Phi^A = (\phi^i, x^a) \equiv (\phi^i, c^\alpha, \bar{c}_\alpha, \pi_\alpha)$ с грассмановскими четностями $\epsilon(c^\alpha) = \epsilon(\bar{c}_\alpha) = \epsilon(\pi_\alpha) + 1 = \epsilon_\alpha + 1$, $\epsilon_\alpha = \epsilon(R_\alpha)$. Для функций f и h на супермногообразии $\mathcal{N}$ с независимыми координатами (Φ^A, Φ^*_A), $\epsilon(\Phi^*_A) = \epsilon_A + 1$, $\epsilon_A = \epsilon(\Phi^A)$ ($\mathcal{N} = \Pi T^*\mathcal{M}$ – кокасательное расслоение со сдвинутой четностью) определена антискобка [3]

$$(f, h) = \frac{\partial_r f}{\partial \Phi^A}\frac{\partial_l h}{\partial \Phi^*_A} - \frac{\partial_r f}{\partial \Phi^*_A}\frac{\partial_l h}{\partial \Phi^A}. \qquad (1)$$

В дальнейшем $\mathrm{ab}f$ означает оператор $h \to \mathrm{ab}f(h) = (f, h)$.

При наиболее общем способе построения континуального интеграла [3] в фиксированной калибровке квантовые средние имеют вид

$$<f> = \int_{\mathcal{M}} d\Phi \exp(-\Lambda(\Phi)) f(\Phi) \exp(-S_\Psi(\Phi)), \tag{2}$$

где

$$H = \phi_i^* R_\alpha^i c^\alpha + \frac{1}{2} c_\gamma^* f_{\alpha\beta}^\gamma c^\beta c^\alpha (-1)^{\epsilon_\alpha} + \bar{c}^{*\alpha} \pi_\alpha; \quad S_\Psi = \mathcal{S} + (\Psi, H), \tag{3}$$

Ψ – невырожденный [3] калибровочный фермион ($\epsilon(\Psi) = 1$) вида $\Psi(\Phi) = \bar{c}_\alpha \chi^\alpha(\Phi)$ и $d\Phi \exp(-\Lambda)$ – форма объема *(квантовая мера)* на $\mathcal{M}$, удовлетворяющая уравнению

$$(\Lambda, H) = \mathrm{div}\,(\mathrm{ab}H) \equiv \frac{\partial_l}{\partial \Phi^A} (-1)^{\epsilon_A} \frac{\partial_l H}{\partial \Phi_A^*}. \tag{4}$$

2. Переходя к стохастическому квантованию, будем рассматривать средние типа (2) как средние по равновесному распределению диффузии на $\mathcal{M}$ управляемой [4] эллиптическим оператором

$$L = \frac{1}{2} g^{-1/2} \exp S_\Psi \partial_A [(-1)^{\epsilon_A} \exp(-S_\Psi) g^{AB} g^{1/2} \partial_B], \tag{5}$$

где $g^{AB} = (-1)^{\epsilon_A \epsilon_B} g^{BA}$, $g = (\mathrm{Ber}(g^{AB}))^{-1}$, $\partial_A = \partial_l / \partial \Phi^A$. Плотность P равновесного распределения по отношению к элементу объема $d\Phi g^{1/2}$ удовлетворяет [4] стационарному уравнению Фоккера – Планка

$$L^* P = 0, \tag{6}$$

где L^* сопряжен с L относительно указанной формы объема. При произвольных $g^{AB}(\Phi)$ решением уравнения (6) является $P = \exp(-S_\Psi)$. Ввиду БРСТ-симметрии, которая в обозначениях (3) имеет вид $(H, S_\Psi) = 0$, это решение БРСТ-инвариантно. Последнему замечанию созвучен следующий *принцип согласования диффузии с БРСТ-симметрией:*

Потребуем БРСТ-инвариантности диффузии, т. е. $[L^*, \mathrm{ab}H] = 0$. Тогда: *(i)* векторное поле $\mathrm{ab}H$ является векторным полем Киллинга [5] в метрике $g^{AB}(\Phi)$, порожденной оператором (5); *(ii)* в силу киллинговости $\Lambda = \ln g^{-1/2}$ удовлетворяет уравнению (4). Ниже выбрано именно это решение для квантовой меры.

3. Произведем "размерную редукцию" от $\mathcal{M}$ к M введенной диффузии, усреднив по всем полям x^a. Для этого предположим, что метрика $g^{AB}(\Phi)$ может быть выбрана в блочно-диагональном виде, $g^{ib} = 0$, с блоками $g^{ij}(\phi)$ и $g^{ab}(\phi, x)$. Тогда: *(i)* уравнения Ланжевена для диффузии, управляемой оператором L, могут быть записаны в виде

$$d\phi^i = \sigma^{ij}(\phi) dw^j + b^i(\phi, x) dt, \tag{7a}$$

$$dx^a = \sigma^{ab}(\phi, x) dw^b + b^a(\phi, x) dt, \tag{7b}$$

$$b^A = \frac{1}{2} g^{-1/2} \exp S_\Psi \partial_B [(-1)^{\epsilon_B} \exp(-S_\Psi) g^{1/2} g^{BA}], \tag{7c}$$

где $\sigma^{AC} \sigma^{BC} = g^{AB}$, дифференциалы понимаются по Ито [4] и w^A означает компоненты (все – четные !) $(n + 3m)$-мерного винеровского процесса [4]. Нашей целью, таким образом, является выразить средний эффект возмущения диффузии (7a) другим диффузионным процессом (7b), что будет сделано в терминах уравнения Фоккера – Планка.

(ii) киллинговость поля $\mathrm{ab}H$ в метрике g^{AB} на $\mathcal{M}$ влечет киллинговость каждого из генераторов R_α в метрике $g^{ij}(\phi)$ на M:

$$g^{ij}_{,k} R^k_\alpha - g^{ik}\partial_k R^j{}_\alpha - (-1)^{\epsilon_i\epsilon_j} g^{jk}\partial_k R^i_\alpha = 0. \tag{8}$$

(iii) имеем $\Lambda(\Phi) = \Lambda_0(\phi) + \Lambda_1(\phi, x)$, где $\Lambda_0 = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{Ber}(g^{ij}))$ и $\Lambda_1(\phi, x)$ *не* преобразуется через березиниан при заменах координат на M.

Если Λ_1 в действительности не зависит от ϕ (т. е. квантовая мера имеет структуру в точности соответствующую прямому произведению), то, подставляя (5) и (3) в (6), используя (4) для Λ указанного вида и киллинговость поля $\mathrm{ab}H$, получаем, усредняя по x^a, что

$$p(\phi) = \int dx \exp(-\Lambda_1(x) - S_\Psi(\Phi)) \tag{9}$$

является плотностью относительно формы объема $d\phi \exp(-\Lambda_0)$ равновесного распределения вероятностей для диффузионного процесса на M, управляемого оператором

$$L^{red} = \frac{1}{2}\exp\mathcal{S}\,\nabla^i(\exp(-\mathcal{S})\nabla_i\cdot) + R^i_\alpha\omega^\alpha\nabla_i, \tag{10}$$

где ∇_i означает ковариантную производную, построенную по метрике g^{ij}, и

$$\omega^\alpha = \frac{\int dx\, c^\alpha \partial_A(g^{AB}(-1)^{\epsilon_A}\exp(-\Lambda - S_\Psi)\partial_B\Psi)}{\int dx \exp(-\Lambda - S_\Psi)}. \tag{11}$$

4. Из (8) следует что генераторы R_α коммутируют с первым членом в (10). Тогда с помощью стандартных аргументов (использующих, впрочем, (8)) [2] получаем, что для вычисления средних от калибровочно-инвариантных величин $f(\phi)$ можно использовать диффузию на M, определяемую уравнением Ланжевена.

$$d\phi^i = \sigma^{ij}dw^j + g_0^{-1/2}\exp(-\vec{\mathcal{S}})\partial_j((-1)^{\epsilon_j} g^{ji} g_0^{1/2}\exp\vec{\mathcal{S}})dt, \tag{12}$$

где $\sigma^{ij}\sigma^{kj} = g^{ik}$, $g_0 = (\mathrm{Ber}\, g^{ij})^{-1} = \exp(-2\Lambda_0)$.

Отметим, что для теорий, в которых $R^i_\alpha(\phi) = r^i_\alpha + t^{ij}_\alpha\phi^j$, $\epsilon_i = 0$, где r^i_α и $t^{ij}_\alpha = -t^{ji}_\alpha$ не зависят от ϕ (как это имеет место в теории Янга – Миллса), уравнения (8) удовлетворяются, например, для $g^{ij} = \delta^{ij}$.

5. Условия совместности уравнения (8) с уравнением (4) при сделанном выборе Λ имеют вид $f^\alpha_{\alpha\beta}(\phi)(-1)^{\epsilon_\alpha} = 0$. Это – единственное априорное ограничение на замкнутую калибровочную алгебру, для которой стохастическое квантование с помощью диффузии (10), (12) при любых $g^{ij}(\phi)$, подчиненных условиям (8), может быть обосновано предложенным способом. Для теорий с *локальными* структурными функциями $f^\alpha_{\alpha\beta}(-1)^{\epsilon_\alpha}$ пропорционально $\delta(0)$ и может быть положено равным нулю в рамках размерной регуляризации.

Я благодарен В.Я.Файнбергу за внимание к работе и плодотворные обсуждения, а также А.А.Цейтлину за введение в стохастическое квантование.

Литература

1. *Parisi G., Wu Y.* Scientia Sinica, 1981, **24**, 483.
2. *Hori T.* Stochastic quantization of gauge theory and supergravity Tokyo Metropolitan Univ. preprint, 1983; *Baulieu L., Zwanziger D.* Nucl. Phys., 1981, **B193**, 103.
3. *Batalin I.A., Vilkovisky G.A.* Phys. Lett., 1981, **102B**, 27.
4. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т. 1, М.: Наука, 1982.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 мая 1983 г.