Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 5, стр. 181 – 183 *5 марта 1982 г.*

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН С КОНЕЧНОЙ ШИРИНОЙ ФРОНТА

М.Д.Спектор

Показано, что слабые ударные волны устойчивы относительно поперечных модуляций

1. В работе [1], с участием автора, изучалась устойчивость решений уравнения Бюргерса, описывающих слабые ударные волны с конечной шириной фронта $\sim 2\mu/\mathrm{v}^2$.

$$u_0(x-\mathrm{v}t)=\mathrm{v}\left[1-\mathrm{th}\,\frac{\mathrm{v}}{2\mu}(x-\mathrm{v}t)\right]. \tag{1}$$

Анализ проводился в рамках приведенного в [1] уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t+uu_x-\mu u_{xx})=-\frac{c_s}{2}\Delta_\perp u, \tag{2}$$

которое учитывает слабую поперечную модуляцию таких волн и аналогично уравнению Кадомцева – Петвиашвили для неодномерных волн в слабодиспергирующих средах [3] (в (1), (2) μ– коэффициент „вязкости", c_s – скорость звука).

Линеаризация уравнения (2) на фоне стационарного решения (1) приводит к следующей спектральной задаче для оператора третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\,\mathrm{th}x\,\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2}{\mathrm{ch}^2x}+p\right]\delta u=\beta\,\delta u, \tag{3}$$

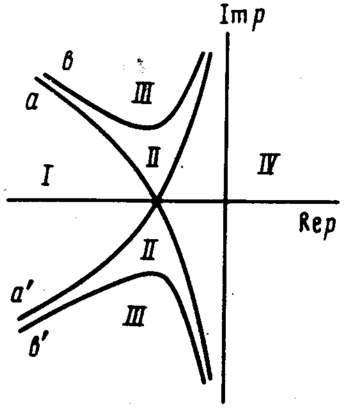
где введены безразмерные переменные $x\to(x-\mathrm{v}t)\mathrm{v}/2\mu$, $t\to t\mathrm{v}^2/4\mu$; возмущение выбрано в виде $\delta u(x)\,e^{pt+i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp}$, $\beta=4c_s\mu^2k_\perp^2/\mathrm{v}^3$. Граничными условиями к уравнению (3) служат условия ограниченности решений $\delta u(x)$ на бесконечности. Наличию или отсутствию неустойчивости соответствует наличие или отсутствие решений уравнения (3) с $\mathrm{Re}p>0$ (конечных при $x\to\pm\infty$).

В работе [1] строилась теория возмущений для уравнения (3) по малому параметру β. Из-за ошибки в расчетах (система функций, по которым производилось разложение, оказалась не полной) был сделан неправильный вывод о неустойчивости решения. В данной работе найдены точные решения уравнения (3) при произвольных β, и показано, что они устойчивы.

2. Рассмотрим асимптотики решений δu. Пусть при $x\to+\infty$ δu ведет себя как e^{-2ax}, а при $x\to-\infty$ – как $e^{2\tilde{a}x}$. Индексы a и $\tilde{a}$ удовлетворяют следующим кубическим уравнениям:

$$a^3-a^2-\frac{p}{4}a-\frac{\beta}{8}=0, \tag{4}$$

$$\tilde{a}^3-\tilde{a}^2-\frac{p}{4}\tilde{a}+\frac{\beta}{8}=0. \tag{5}$$



"Хорошими" назовем индексы с положительной вещественной частью, $\mathrm{Re}\,\tilde a > 0$ (соответствующие асимптотики δu конечны). Как следует из (4), (5), индексы a, $\tilde a$ проходят через свои критические (чисто мнимые) значения, когда параметр p пробегает кривые

$$a, a': \qquad \mathrm{Re}\,p = -4v^2, \qquad \mathrm{Im}\,p = -4v + \frac{\beta}{2v} \quad (a = iv),$$

$$b, b': \qquad \mathrm{Re}\,p = -4v^2, \qquad \mathrm{Im}\,p = -4v - \frac{\beta}{2v} \quad (\tilde a = iv)$$

в плоскости $\mathrm{Re}\,p$, $\mathrm{Im}\,p$ (см. рисунок). Эти кривые делят плоскость комплексного p на четыре области (I – IV на рисунке), причем число "хороших" индексов в этих областях таково: I – $(3, \tilde 2)$, II – $(2, \tilde 2)$, III – $(2, \tilde 1)$, IV – $(1, \tilde 2)$. Эта запись означает, что, например, в области I все три корня уравнения (4) имеют положительную вещественную часть, а уравнение (5) имеет лишь два корня с $\mathrm{Re}\,\tilde a > 0$ ($\tilde 2$ – два хороших индекса). Область неустойчивости $\mathrm{Re}\,p > 0$ является частью области IV, в которой корни уравнений (4), (5) пронумеруем следующим образом:

$$\mathrm{Re}\,a_3 < \mathrm{Re}\,a_2 < 0 < \mathrm{Re}\,a_1\,, \qquad \mathrm{Re}\,\tilde a_1 < 0 < \mathrm{Re}\,\tilde a_2 < \mathrm{Re}\,\tilde a_3\,. \tag{6}$$

В уравнении (3) перейдем к аргументу $z = {}^1/_2(1 - \mathrm{th}\,x)$ (при $x \to \infty$ $z \to e^{-2x}$, а при $x \to -\infty$ $1 - z \to e^{2x}$) и введем в рассмотрение наборы решений уравнения (3) – аналоги функций Йоста:

$$\Phi_i = z^{a_i}\,\phi_i(z)\,, \qquad \Psi_i = (1-z)^{\tilde a_i}\,\psi_i(1-z).$$

Функции $\phi_i(z)$ регулярны в нуле и нормированы условием $\phi_i(0) = 1$, функции $\psi_i(1-z)$ регулярны при $z = 1$ и нормированы условием $\psi_i(z = 1) = 1$. Наборы решений Φ_i и Ψ_i связаны между собой элементами матрицы рассеяния S_p : $\Phi_i = S_{ik}\,\Psi_k$, в частности

$$z^{a_1}\phi_1 = S_{11}(1-z)^{\tilde a_1}\psi_1 + S_{12}(1-z)^{\tilde a_2}\psi_2 + S_{13}(1-z)^{\tilde a_3}\psi_3\,. \tag{7}$$

В области IV комплексной плоскости p из трех функций Φ_i только Φ_1 ограничена при $z \to 0$ ($x \to \infty$), а при $z \to 1$ ($x \to -\infty$) ограничены Ψ_2 и Ψ_3. Поэтому решение (3), ограниченное при всех x, существует лишь для тех собственных значений p, для которых $S_{11}(p) = 0$. Это условие определяет дискретный спектр p (если он существует) в области IV. Сразу заметим, что если искать ϕ_1 в виде $(1-z)^{\tilde a_1} f(z)$, то, как следует из (7), (6), $S_{11}(p) = f(1)$. Прямым вычислением этой величины мы докажем отсутствие дискретного спектра.

3. Подставляя в (3) $\delta u = z^{a_1}(1-z)^{\tilde a_1} f(z)$ приходим к следующему уравнению для f:

$$z^2(1-z)^2\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + z(1-z)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,[3a_1 + 2 - (3\lambda + 4)z] + \frac{\partial f}{\partial z}\left\{3a_1^2 + a_1 - \frac{p}{4} - \right.$$

$$\left. - z\,[(\lambda+2)(3\lambda-1) + \mu(3\lambda+1)] + z^2(\lambda+2)(3\lambda-1)\right\} - f\left[\frac{\mu}{2}(\lambda+1)(3\lambda-4) + \frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2) - \right.$$

$$-z(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)\Big] = 0,$$

где $\lambda = a_1 + \widetilde{a}_1$, $\mu = a_1 - \widetilde{a}_1$. Разложение функции f в ряд $f = \Sigma C_n \frac{z^n}{n!}$ и анализ рекуррентного соотношения для коэффициентов C_n (который мы здесь опускаем) подсказывают интегральную подстановку для f вида

$$f = \int_C dt\,(-t)^{a_1+\widetilde{a}_1}(1-t)^{-a_3-\widetilde{a}_1-1}\,G(zt),$$

C – здесь и ниже, – контур, используемый в теории гипергеометрических функций. Такая подстановка сводит уравнение третьего порядка для f к уравнению второго порядка для $G(z)$:

$$z(1-z)^2\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + (1-z)\frac{\partial G}{\partial z}\left[1 + a_1 - a_2 - z(\lambda + a_1 - a_3)\right] - G\Big[\frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-2) + \frac{\mu}{2}(3\lambda-4) -$$

$$- z(1 + a_1 - a_3)(\lambda-2)\Big] = 0,$$

которое в свою очередь подстановкой $G(z) = (1-z)^s F(z)$ приводится к стандартному гипергеометрическому уравнению. Показатели s, с учетом (4), (5), оказываются равными $s_1 = a_3 + \widetilde{a}_3$, $s_2 = a_3 + \widetilde{a}_2$. Приведем явное выражение для $f(z)$, учитывая нормировку $f(0) = 1$:

$$f(z) = \frac{\Gamma(1 + a_1 - a_3)\Gamma(-a_1 - \widetilde{a}_1)}{\Gamma(-a_3 - \widetilde{a}_1)(-2\pi i)}\int_C dt(-t)^{a_1+\widetilde{a}_1}(1-t)^{-a_3-a_1-1}(1-zt)^{a_3+\widetilde{a}_3}\times$$

$$\times F(-a_2 - \widetilde{a}_2,\ 1 + a_1 + \widetilde{a}_3,\ 1 + a_1 - a_2,\ zt). \qquad (8)$$

Аналогичным образом могут быть построены и другие решения уравнения.

4. Для нахождения коэффициента рассеяния $S_{11}(p) = f(1)$ разложим в выражении (8) гипергеометрическую функцию $F(t)$ в ряд и проинтегрируем почленно. Полученный ряд удается просуммировать и найти окончательное выражение

$$S_{11}(p) = \frac{\Gamma(1 + a_1 - a_3)\,\Gamma(1 + a_1 - a_2)\Gamma(\widetilde{a}_2 - \widetilde{a}_1)\Gamma(\widetilde{a}_3 - \widetilde{a}_1)}{\Gamma(1 + a_1 + \widetilde{a}_2)\Gamma(1 + a_1 + \widetilde{a}_3)\Gamma(-a_2 - \widetilde{a}_1)\Gamma(-a_3 - \widetilde{a}_1)}. \qquad (9)$$

Нули S_{11} могут быть сосредоточены лишь в точках, где аргументы Г-функций в знаменателе (9) равны целым отрицательным числам. Но в силу условий (6) в области IV все эти аргументы обладают положительной вещественной частью.

Таким образом, спектр собственных значений p уравнения (3) целиком лежит вне области IV, в частности, вне "неустойчивой" области $\mathrm{Re}\,p > 0$. Это и означает, что ударные волны с конечной шириной фронта устойчивы относительно поперечных модуляций.

В заключение автор благодарит Е.А.Кузнецова, и Г.Е.Фальковича за многочисленнные полезные обсуждения.

Литература

1. *Кузнецов Е.А., Спектор М.Д., Фалькович Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **30**, 328.
2. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: изд. Наука, 1973.
3. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* ДАН СССР, 1970, **192**, 753.

**Институт автоматики
и электроники
Академии наук СССР
Сибирское отделение**

**Поступила в редакцию
17 декабря 1981 г.**