Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 5, стр. 187 – 190 *5 марта 1982 г.*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА НА ЦЕНТРЕ МАЛОГО РАДИУСА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.П.Андреев, А.В.Кошелкин

В допущении малости радиуса действия потенциала притяжения по сравнению с магнитной длиной найден спектр связанных и квазисвязанных состояний электрона с произвольным моментом на центре произвольной глубины в магнитном поле, в произвольной зоне Ландау N.

1. Спектр электрона в поле центра малого радиуса $a \ll l$ $(l = (c\hbar/|e|H)^{1/2}$ – магнитная длина) в магнитном поле изучался в [1–4]. В [2] методом потенциала нулевого радиуса исследовалось слабо связанное состояние электрона с нулевой проекцией орбитального (L) момента $m = 0$ на направление H в зоне $N = 0$, с помощью одного феноменологического параметра-амплитуды рассеяния электрона на центре при $H = 0$. В [3] изучался спектр связанных и квазисвязанных состояний электрона в поле мелкого $U \ll \hbar^2/m^*a^2$ центра в произвольной зоне Ландау, при слабом перемешивании уровней Ландау центром. В [4] изучались слабо связанные состояния с $L \neq 0$ с помощью двух феноменологических параметров – энергии связи при $H = 0$ и эффективного радиуса центра $a(H = 0)$. Для слабо связанных состояний уровни Ландау сильно перемешиваются центром, так что задача становится трехмерной и возникает проблема граничных условий. Граничное условие непрерывности логарифмической производной весьма чувствительное к величине расстройки потенциала ΔU от резонанса, а при $L \neq 0$ и к величине энергии частицы $E(H)$, заменялось в [4] усредненным по углам граничным условием для волновой функции на поверхности сферы $a(H = 0)$, однако не учитывалось столь же чувствительное к ΔU и E изменение нормировочного коэффициента волновой функции при $H \neq 0$. Условие [4] законно при $\Delta U \lesssim \hbar\omega_H$ $\Delta U > 0$ $(\omega_H = eH/m^*c$ – циклотронная частота), но требует уточнения при $\Delta U < 0$. Кроме того, остается открытым вопрос граничных условий при нахождении спектра в произвольной зоне Ландау $N \neq 0$.

Ниже, только в допущении $a << l$ найден спектр связанных и квазисвязанных состояний электрона на центре произвольной глубины, в произвольной зоне Ландау N и с произвольным m в однородном магнитном поле $H \parallel z$. Систему решений уравнения Шредингера для электрона в поле $U(r)$ при $H = 0$ считаем известной.

2. Интегральное уравнение для волновой функции электрона с заданной проекцией орбитального момента m на направление магнитного поля имеет вид

$$\psi_m(\rho; z) = -\frac{m^*}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\ \psi_m(\rho'; z')U(r')\,C_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}'; E; H). \tag{1}$$

Здесь $C_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}'; E; H)$ – функция Грина электрона в магнитном поле. Из (1) видно, что решение $\psi_m(\rho'; z')$ во "внутренней" области $r \lesssim a$ определяет волновую функцию во всем пространстве. В случае центра малого радиуса $<< l$ в области действия потенциала $U(r)$ можно пренебречь влиянием осцилляторного потенциала магнитного поля $\backsim m^*\omega_H^2\rho^2 \propto \hbar\omega_H a^2/l^2$ на электрон, если $\hbar\omega_H a^2/l^2 << max(\Delta U; E)$. При этом решение уравнения Шредингера во "внутренней" области описывает электрон в поле $U(r)$ при $H = 0$ (с заменой энергии $E \to E - \frac{m}{2}\hbar\omega_H$). Т.е. за счет малости радиуса центра ψ_m во "внутренней" области зависит от H только через параметр E (который надлежит найти), а решение уравнения Шредингера в области малых $r \lesssim a$ не требует знаний функции Грина электрона $C_m(E; H)$, что радикально упрощает решение задачи.

Далее, функция Грина $C_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}'; E; H)$ в (1) также зависит от энергии электрона, как от параметра и, кроме того, сложным образом зависит от напряженности магнитного поля. Если E известно, то во "внутренней" области (1) должно превращаться в тождество. Система решений уравнения Шредингера во "внутренней" области есть произведение радиальных и шаровых функций [5]

$$\psi_{Lm}(\rho; z) = R_{Lm}(E; r)\Theta_{Lm}(\theta), \tag{2}$$

где функция R_{Lm} удовлетворяет обычному граничному условию в нуле: $R_{Lm}(r \to 0) = 0$. Так как при $H = 0$ L не является хорошим квантовым числом, то во "внутренней" области волновая функция (1) есть суперпозиция (2) с произвольными коэффициентами $C_{L \geqslant |m|}$. Легко показать, что в магнитном поле энергия состояния с данным m определяется состоянием с $L = |m|$, а учет состояний с $L > |m|$ дает поправки малости $min\left\{a^2 l^{-2};\ |^1/_2 - E/_{\hbar\omega_H}|\right\}^{L-|m|}$. Поэтому в качестве ψ_m во "внутренней" области берем (2) с $L = |m|$. Однако, даже при этом структура $G_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}'; E; H)$ в магнитном поле такова, что при произвольном E и конечном r невозможно разделить в функции Грина угловые и радиальные переменные. Третьим обстоятельством, позволяющим решить задачу является то, что угловые и радиальные переменные в G_m разделяются при $r \to 0$. При этом:

$$G_m(r \to 0) \backsim \rho^{|m|} \backsim r^{|m|}\sin^{|m|}\theta \backsim r^{|m|}\,\Theta_{mm}(\theta). \tag{3}$$

Если $U(r \to 0)$ возрастает медленнее r^{-2}, то

$$R_L(r \to 0) = A^{(L)} r^L. \tag{4}$$

Подставляя (2) с $L = |m|$ в (1), устремляя $r \to 0$, учитывая (3) и (4), отделяя в G_m угловые и радиальные переменные, придем к уравнению, определяющему спектр энергий электрона в состоянии с заданным, произвольным m, в поле центра притяжения малого радиуса, но произвольной глубины и однородном магнитном поле. Для зоны Ландау $N = 0$, уравнение запишется ($|m| \to m$):

$$A^{(m)}a^m = -\frac{\Delta^{2m}}{(2m+1)!!}\int_0^\infty f_m(x)dx\left\{\sum_{n=0}^{m} B_n^{(m+1)}\frac{1}{n!}\left(-\frac{d}{\Delta^2 x dx}\right)^{m-n}\frac{e^{-\sqrt{2\eta}\Delta x}}{x}\right.$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Delta \int_0^\infty dt\, e^{-\eta t^2}\left[(1-\exp(-t^2))^{-m-1} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n^{(m+1)} \frac{(t^2)^{n-m}}{n!}\right]\Bigg\}, \qquad (5)$$

$$\Delta \equiv al^{-1}; \eta = \frac{1}{2} - E/\hbar\omega_H; \quad f_m(x) = x^{m+2} R_{mm}(x) v(x), \quad v(x) = \frac{U(x)}{\hbar^2/m^* a^2}; \quad x = r/a.$$

$B_n^{(m)}$ – числа Бернулли порядка m [6]. При получении (5) мы воспользовались тем, что функция Грина в (1) может быть просуммирована по всем зонам Ландау [6]. Уравнения аналогичные (5) могут быть получены для спектра в любой зоне Ландау $N \neq 0$.

3. Уравнение (5) позволяет сделать ряд общих заключений об энергетическом спектре электрона. Наиболее интересен случай ямы близкой к резонансу, когда глубина U такова, что в яме без магнитного поля имеется виртуальное или реальное слабо связанное состояние. При этом энергия электрона мала $\sqrt{2\eta}\,\Delta << 1$, и экспоненты в (5) могут быть разложены. Для $m = 0$ неисчезающий член разложения, содержащий η пропорционален $\sqrt{\eta}$, а при $m \neq 0 \backsim \eta$.

Если глубина ямы такова, что без магнитного поля в ней нет мелких связанных состояний с $E << \hbar^2/m^* a^2$, то присутствие магнитного поля приводит к появлению уровней, лежащих под дном зоны Ландау и регулируемых магнитным полем [2–4]. Такие состояния при $H \to 0$ соответствуют $\eta << 1$, при этом характерная область интегрирования по t в (5) велика по сравнению с единицей и интеграл можно заменить его асимптотическим значением $\backsim 1/\sqrt{\eta}$. Энергией электрона в константе $A^{(m)}$ и функции f_m в (5) можно пренебречь. В результате получаем для магнитных состояний

$$\frac{\hbar\omega_H}{2} - E = \frac{a_m^2}{2}\Delta^{4m+2}\hbar\omega_H \quad . \qquad (6)$$

Можно показать, что константа $a_m \backsim (\hbar^2/m^* a^2) E_m^{-1}$, где E_m – энергия виртуального уровня с заданным m при $H = 0$. В частном случае $m = 1$ (6) совпадает с зависимостью, полученной в [4].

Если в яме есть реальное связанное состояние, на которое магнитное поле действует как возмущение, т. е. $|E| >> \hbar\omega_H$ или $\eta >> 1$, то характерная область интегрирования по t в (5) мала по сравнению с единицей. Разлагая показатели экспонент в (5) с точностью до членов $\backsim t^4$ получим в правой части сумму членов $\backsim \left(-\eta + \frac{m+1}{2}\right) \backsim E + \frac{1}{2} m\hbar\,\omega_H$. Энергия в такой же комбинации входит в константу "внутренней" области A^m. Получающееся при этом из (5) уравнение иной зависимости от H не содержит и мы приходим к формуле для уровней энергии электрона с учетом парамагнитных поправок:

$$E = E_m - \frac{1}{2} m\hbar\omega_H .$$

Учет в (5) членов более высокой малости по t позволяет получить диамагнитные поправки к энергетическому спектру электрона.

Далее, в частном случае $m = 0$ и $\sqrt{\eta}\,\Delta << 1$ уравнение, получающееся из (5) совпадает с уравнением для спектра, полученным в [2].

4. В отличие от спектра в нижней зоне Ландау, состояния в зонах $N > 0$ с $m < N$ являются квазистационарными. Квазисвязанное состояние с $m = 0$ в зоне Ландау $N = 1$ при $U << \hbar^2 : m^* a^2$ залегает ниже дна зоны 1 на $\mathrm{Re}E \backsim \hbar\omega_H \Delta^2 U^2$ и имеет ширину $\mathrm{Im}\,E \backsim \hbar\omega_H \Delta^3 U^3$, что соответствует [3]. По мере увеличения U уровень углубляется, однако, его глубина сначала растет значительно быстрее чем ширина, так, при $\mathrm{Re}E \cong 0,5\hbar\omega_H$, $\mathrm{Im}\,E/\mathrm{Re}E = 0,1$. Затем, начиная с $\mathrm{Re}E \simeq 0,5\,\hbar\omega_H$ происходит быстрый рост ширины уровня по сравнению с его глубиной.

Авторы весьма признательны Ю.А.Гурвичу и И.Б.Левинсону за обсуждения работы.

Литература

1. *Бычков Ю.А.*, ЖЭТФ, 1960, 39, 689.
2. *Демков Ю.Н., Друкарев Г.Ф.* ЖЭТФ, 1965, **49**, 257.
3. *Андреев С.П.* ЖЭТФ, 1978, 75, 1056.
4. *Демков Ю.Н., Друкарев Г.Ф.* ЖЭТФ, 1981, 81, 1918.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, М.: ФМ. стр. 131, 1974.
6. *Бейтмен С.Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, стр. 54, т.2 стр. 190, М.: Наука, 1965 г.

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
21 декабря 1981 г.