Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 5, стр. 220 – 223 *5 марта 1982 г.*

УГЛОВОЕ УСЛОВИЕ НА ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ

В.А.Карманов

Для вектора состояния, определенного на световом фронте $\omega x = \sigma$ ($\omega^2 = 0$), получено уравнение, возникающее при рассмотрении четырехмерных вращений гиперповерхности светового фронта. Это уравнение дополняет уравнение Шредингера и устраняет неоднозначности в волновых функциях релятивистских составных систем.

В работах [1 – 5] был развит аппарат релятивистских волновых функций (ВФ), необходимый для описания составных систем (ядер, адронов в кварковых моделях) при импульсах составляющих порядка их масс. Рассматриваемые ВФ являются фоковскими компонентами вектора состояния, определенного на поверхности светового фронта $\omega x = 0$ ($\omega^2 = 0$). Удобство такого аппарата, по сравнению, например, с теорией на "нулевой плоскости" $z + t = 0$, состоит в явной ковариантности ВФ и в максимальном отделении кинематических преобразований от динамических: преобразования системы отсчета являются кинематическими (т. е. не содержат взаимодействия), что, например, существенно упрощает построение состояний со спином [3], а динамические уравнения для вектора состояния Ф получаются при рассмотрении движения поверхности светового фронта относительно данной системы координат. Одно из таких уравнений есть уравнение Шредингера, следующее из рассмотрения трансляций светового фронта и имеющее в представлении взаимодействия вид

$$i\frac{\partial\phi(\sigma)}{\partial\sigma} = \hat{H}(\sigma)\phi(\sigma), \tag{1}$$

где $\hat{H}(\sigma) = \int \hat{H}^{int}(x)\,\delta(\omega x - \sigma)d^4x$, $\hat{H}^{int}(x)$ – гамильтониан взаимодействия.

Цель настоящей работы – получить еще одно уравнение ("угловое условие") для вектора состояния, следующее из рассмотрения, четырехмерных вращений поверхности светового фронта, и выяснить его роль в задаче на связанные состояния. Оказывается, что это уравнение устраняет нефизическое вырождение релятивистских состояний, возникающее в системах с отличным от нуля полным моментом (в частности, в уравнении Вайнберга [6] для ненулевого момента).

Искомое уравнение следует из уравнения Томонаги –Швингера:

$$i\frac{\delta\phi}{\delta\sigma(x)} = \hat{H}^{int}(x)\phi,$$

Рассмотрим такие вариации поверхности светового фронта $\omega x = \sigma$, которые превращают ее в повернутую поверхность $\omega' x = \sigma$, где $\omega' = \omega + \delta\omega$, $\delta\omega_\mu = \epsilon_{\nu\mu}\omega_\nu$, $\epsilon_{\nu\mu}$ – бесконечно малые параметры поворота. Полное приращение вектора состояния $\delta\phi$ есть сумма приращений в каждой точке поверхности: $i\delta\phi = \int\hat{H}^{int}(x)\delta V(x)\Phi$. Приращение четырехмерного объема над точкой x поверхности $\omega x = \sigma$ есть $\delta V(x) = \epsilon_{\mu\nu}x_\mu\omega_\nu\delta(\omega x - \sigma)d^4x$. С другой стороны $\phi(\omega) \to \phi(\omega + \delta\omega) = \phi(\omega) + \delta\phi(\omega)$, где $\delta\phi(\omega) = \epsilon_{\mu\nu}\omega_\mu\,{}^{\partial}/_{\partial\omega_\nu}\,\phi(\omega)$. Отсюда получаем уравнение, определяющее зависимость вектора состояния от 4-вектора ω:

$$\hat{L}_{\mu\nu}(\omega)\phi = \hat{J}^{int}_{\mu\nu}\,\phi, \tag{2}$$

где обозначено

$$\hat{L}_{\mu\nu}(\omega) = i\left(\omega_\mu\frac{\partial}{\partial\omega_\nu} - \omega_\nu\frac{\partial}{\partial\omega_\mu}\right), \tag{3}$$

$$\hat{J}^{int}_{\mu\nu} = \int \hat{H}^{int}(x)(x_\mu\omega_\nu - x_\nu\omega_\mu)\delta(\omega x - \sigma)d^4x. \tag{4}$$

Помимо уравнений (1) и (2) вектор состояния связанной системы удовлетворяет уравнениям на собственные значения:

$$\hat{P}_\mu\phi^J_s = p_\mu\phi^J_s, \tag{5}$$

$$\hat{W}^2_\mu\,\phi^J_s = -\,M^2J(J+1)\,\phi^J_s, \tag{6}$$

$$\hat{W}_3\,\phi^J_s = Ms\phi^J_s, \tag{7}$$

где $\hat{P}_\mu = \hat{P}^0_\mu + \omega_\mu\hat{H}(\sigma)$, $\hat{P}^0_\mu$ – свободный оператор, $p^2_\mu = M^2$, $\hat{W}_\mu$ – вектор Паули – Любанского:

$$\hat{W}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\gamma}\hat{P}_\nu\hat{M}_{\rho\gamma}, \tag{8}$$

здесь:

$$\hat{M}_{\rho\gamma} = \hat{J}^0_{\rho\gamma} + \hat{L}_{\rho\gamma}(\omega),$$

$\hat{J}^0_{\rho\gamma}$ - свободный оператор, $\hat{L}_{\rho\gamma}(\omega)$ дается формулой (3). Обычно в вектор Паули – Любанского вместо $\hat{M}_{\rho\gamma}$ входит оператор:

$$\hat{J}_{\rho\gamma} = \hat{J}^0_{\rho\gamma} + \hat{J}^{int}_{\rho\gamma},$$

где $\hat{J}^{int}_{\rho\gamma}$ дается формулой (4). Однако, имея ввиду уравнение (2), мы заменили в (8) $\hat{J}^{int}_{\rho\gamma}$ на $\hat{L}_{\rho\gamma}(\omega)$ и $\hat{J}_{\rho\gamma}$ на $\hat{M}_{\rho\gamma}$.

Уравнение (5) определяет импульс и спектр масс, уравнения (6) и (7) – момент J и его проекцию s (в системе, где $\mathbf{p} = 0$), причем построение состояний с определенным моментом есть задача чисто кинематическая, поскольку оператор $\hat{M}_{\rho\gamma}$, входящий в (8), не содержит взаимодействие. Эта задача решена в работе [3]. Уравнение (1) определяет тривиальную зависимость ϕ от "косого" времени σ. Что же определяет уравнение (2) (помимо возможности замены $\hat{J}_{\rho\gamma}$ на $\hat{M}_{\rho\gamma}$ в (8))?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что оператор

$$\hat{A} = \omega_\mu \hat{W}_\mu \tag{9}$$

коммутирует с $\hat{P}_\mu$ и с $\hat{W}_\mu$, т. е. состояния кроме массы и спина характеризуются еще одним квантовым числом – собственным значение оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}\,\phi_a = a\phi_a\,. \tag{10}$$

Например, при $J = 1$ имеем три состояния: $a = 0, \pm 1$. Эти состояния вырождены. Действительно, оператор

$$\Delta\hat{J}_{\mu\nu} = \hat{M}_{\mu\nu} - \hat{J}_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu}(\omega) - \hat{J}^{int}_{\mu\nu} \tag{11}$$

коммутирует с $\hat{P}_\mu$ (коммутаторы $\hat{M}_{\mu\nu}$ и $\hat{J}_{\mu\nu}$ с $\hat{P}_\mu$ равны), но не коммутирует с $\hat{A}$:

$$[\Delta J_{\mu\nu}, \hat{A}\,] = i\omega_a \hat{P}_\beta(\epsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}\,\Delta\hat{J}_{\nu\lambda} - \epsilon_{\alpha\beta\nu\lambda}\Delta J_{\mu\lambda}) + i(\hat{W}_\mu\omega_\nu - \hat{W}_\nu\omega_\mu)\,. \tag{12}$$

Поэтому состояние $\Phi' = \Delta\hat{J}_{\mu\nu}\Phi_a$, есть суперпозиция состояний с различными a, но с той же массой, что и Φ_a.

Если вектор состояния отвечает отличному от нуля моменту, то действие коммутатора (12) на вектор состояния дает отличный от нуля результат, даже если уравнение (2) (т. е. $\Delta\hat{J}_{\mu\nu}\,\Phi = 0$) удовлетворяется. Поэтому уравнения (2) и (10) не совместны. Решением уравнения (2) является суперпозиция вырожденных состояний ϕ_a:

$$\phi = \sum_a c_a\,\phi_a\,. \tag{13}$$

Таким образом, уравнение (2) ликвидирует нефизическое вырождение релятивистских состояний и будучи переписанным в виде $\Sigma c_a(\Delta\hat{J}_{\mu\nu})_{a'a} = 0$ ($(\Delta\hat{J}_{\mu\nu})_{a'a}$ – матричные элементы оператора (11) в базисе ϕ_a) определяет (с точностью до нормировки) коэффициенты в формуле (13).

Поясним сказанное примером двухчастичной ВФ. Эта ВФ удовлетворяет уравнению, приближенно получаемому из (5):

$$(4(\mathbf{q}^2 + m^2) - M^2)\,\psi(\mathbf{q},\mathbf{n}) = -\frac{m^2}{2\pi^3}\int \psi(\mathbf{q}',\mathbf{n})V(\mathbf{q}',\mathbf{q},\mathbf{n},M^2)\frac{d^3q'}{\epsilon(\mathbf{q}')}\,, \tag{14}$$

здесь $\mathbf{q}$ – импульс частицы 1 в системе покоя пары 1 и 2, $\mathbf{n}$ – направление $\vec{\omega}$ в этой системе [1]. Уравнение (14), записанное в переменных $\mathbf{k}_\perp^2 = \mathbf{q}^2 - (\mathbf{n}\,\mathbf{q})^2$ и $x = (1 - \mathbf{nq}/\epsilon(\mathbf{q}))/2$, совпадает с уравнением Вайнберга [6] для ВФ в системе с бесконечным импульсом (см. [4]). Оператор момента имеет вид [3]:

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{i}\left[\mathbf{q}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right] + \frac{1}{i}\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right] \tag{15}$$

В пределе $q \ll m$ ВФ перестает зависеть от $\mathbf{n}$, член $\frac{1}{i}\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right]$ в (15) может быть опущен, и оператор (15) переходит в нерелятивистский. Роль оператора (9) играет оператор

$\hat{A}' = \mathbf{n}\hat{\mathbf{J}}$. Он коммутирует с $\hat{I}$ и с ядром V (так как ядро V – скаляр). Поэтому при $J \neq 0$ независимо от вида ядра уравнение (14) имеет несколько решений, отличающихся собственным значением оператора $\hat{A}'$. Так, основное состояние дейтрона было бы вырождено. Из уравнения (2) следует условие на фоковские компоненты, снимающее эту проблему. Явный вид этого условия зависит от исходного гамильтониана $\hat{H}^{int}(x)$ и от дальнейших приближений. Условие, на двухчастичную ВФ, полученное в рамках модели двух скалярных частиц, взаимодействующих в лестничном приближении посредством обмена скалярной безмассовой частицей, будет приведено в более подробной публикации. Отметим, что найденная ранее в этой модели ВФ на световом фронте [4] и релятивистская ВФ дейтрона [5] удовлетворяют этому условию.

Автор признателен Л.А.Кондратюку, В.Е.Маркушину, Дж.М.Намысловскому и И.С.Шапиро за полезные и стимулирующие обсуждения.

Литература

1. *Карманов В.А.* ЖЭТФ, 1976, 71, 399; Письма в ЖЭТФ, 1976, 23, 62.
2. *Карманов В.А.* ЖЭТФ, 1978, 75, 1187.
3. *Карманов В.А.* ЖЭТФ, 1979, 76, 1884.
4. *Karmanov V.A.* Nucl. Phys., 1980, **B166**, 378.
5. *Karmanov V.A.* Nucl. Phys., 1981, **A362**, 331.
6. *Weinberg. S.* Phys. Rev., 1966, **150**, 1313.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
12 января 1982 г.