Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 2, стр. 51 – 54 *25 июля 1983 г.*

ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Я.Б.Зельдович

Силовые линии стационарного двумерного случайного магнитного поля не создают перколяции. При наложении слабого постоянного поля возникает перколяция по тонким жгутам. Обсуждается турбулентная теплопроводность при почти двумерном движении жидкости.

Интерес к магнитным силовым линиям, определяемым уравнением

$$d\mathbf{r} = \mathbf{B}(\mathbf{r})\, d\alpha \qquad (1)$$

(α – произвольный скалярный параметр), возрождающим идеи Фарадея, возник в последние десятилетия прежде всего в связи с теорией управляемой термоядерной реакции, а также в связи с задачами астрофизики, где имеет место вмороженность поля в плазму, и плазма определяет в трехмерном пространстве естественную систему отсчета, в которой определен (псевдо) вектор $\mathbf{B}$ в отличие от тензора F_{ik} пространства Минковского.

Рассмотрим вопрос о свойствах магнитных „силовых" линий. Один из важнейших вопросов состоит в том, тянутся ли эти линии не прерываясь на бесконечное расстояние в том или ином направлении? Такая постановка вопроса называется перколяционной. Слово „перколяция" означает протекание. Наглядно можно представить себе вместо линий поля тонкие трубки, наполненные жидкостью, и поставить вопрос, позволяет ли данная система трубок перекачивать жидкость на неограниченное расстояние. Перколяционная постановка вопроса дополняет подробно развитую Моффатом [1] и другими постановку вопроса о зацеплении силовых линий.

Перколяция вдоль магнитных линий интересна прежде всего потому, что вдоль этих линий по спиралям движутся заряженные частицы.

Естественно, что и теплопроводность термоядерной плазмы, обусловленная диффузией электронов, зависит от свойств магнитных силовых линий и поверхностей, на которые они навиваются.

В частности, Кадомцев и Погуце [2] рассматривают трехмерную задачу, в которой малое случайное двумерное поле $\mathbf{b}(b_x, b_y, 0)$ наложено на большое постоянное поле, направленное по оси z, $\mathbf{B}(0, 0\, B_0)$. Диффузия и теплопроводность определяются тем искривлением силовых линий, которое зависит от $\mathbf{b}$. В упомянутой работе поле $\mathbf{b}$ выражается с помощью двумерного скаляра ϕ, т.е. z-компоненты вектора потенциала, $\mathbf{a}$ $(0, 0, \phi)$

$$b_x = \partial\phi / \partial y, \quad b_y = -\,\partial\phi / \partial x. \qquad (2)$$

Силовые линии в плоскости x, y обходят максимум ϕ против часовой стрелки, а минимум ϕ – по часовой стрелке.

В том случае, когда ϕ не зависит ни от времени, t, ни от третьей координаты z, авторы [2] сводят вопрос к перколяционным свойствам случайной функции двух переменных

Условимся обозначать [1)] и нормировать

$$\langle \phi \rangle = 0, \quad \langle \phi^2 \rangle = 1. \qquad (3)$$

[1)] Обозначения $\mathbf{b}$, ϕ несущественным образом отличаются от [2].

Условимся также, что ϕ достаточно гладкая функция с достаточно малой корреляцией на большом расстоянии и с гауссовым распределением вероятности. На спектральном языке это соответствует фурье-разложению ϕ со случайными фазами и амплитудами ϕ_k, такими, например, что

$$<\phi_k^2> \sim \exp(-k^2/k_0^2), \quad k > k_0 \; ; \; <\phi_k^2> \sim (k/k_0)^{2n}, \; n > 0, \; k \ll k_0. \qquad (4)$$

Естественное предположение, использованное в [2], состоит в том, что области с $\phi > \epsilon$ (где $\epsilon > 0$), которые занимают меньше половины всей площади, образуют изолированные области („острова"), по которым нет перколяции. Можно ввести величину $l(\epsilon)$, характеризующую средний размер острова или среднюю длину изолинии, ограничивающей остров.

В двумерной задаче, когда плоскость разбита на области двух типов, естественно полагать, что когда области первого типа образуют изолированные острова, то области второго типа образуют сплошной океан. Соответственно условия $\phi < \epsilon$, $\epsilon > 0$, определяют единую область, по которой происходит перколяция [1]. Величина $\epsilon = 0$ является критическим значением. Можно ввести величину $l(\epsilon)$, характеризующую средний размер острова или среднюю длину изолинии $\phi = \epsilon$, ограничивающей остров.

В работе [2] дана оценка функции $l(\epsilon)$ и далее предполагается, что должным образом усредненная величина $l(\epsilon)$ играет роль эффективной длины свободного пробега в теории диффузии и теплопроводности [2].

Для задачи о плазменных устройствах с сильным продольным полем $B_z = B_0$ нет оснований предполагать, что малые возмущения т.е. $\mathfrak{b}$ не зависят от z и/или от времени, и в таком случае общая идея работы [2] правильна. В данной статье рассмотрим, однако, строго идеализированную задачу, в которой 1) либо поля B_0, направленного по z, вовсе нет, либо по оси z наложено условие периодичности $z \equiv z + 2\pi R$, описывающее тор большого радиуса R с осью z, направленной по окружности тора, и 2) двумерное поле $\mathfrak{b}$ совершенно не зависит от z и t, 3) частицы двигаются по силовым линиям, ларморов радиус r спирали, описываемой электроном, считаем равным нулю и пренебрегаем также столкновениями и другими эффектами, которые могли бы вызвать перескок электрона с одной линии на другую.

После такой далеко идущей идеализации в предлагаемой статье получен результат, противоположный утверждению работы [2]: диффузия электронов в двумерном случайном поле отсутствует, коэффициент диффузии равен нулю.

Смысл результата состоит в том, что орбиты электронов в плоскости x, y оказываются замкнутыми. Зададимся начальным плавным распределением концентрации n электронов и их температуры T. Движение по замкнутой орбите приведет к усреднению по всей орбите, но не более. Средние значения $\bar{n}$, $\bar{T}$ на различных орбитах в этом приближении остаются различными навсегда.

Другая постановка задачи состоит в рассмотрении слоя конечной толщины, например, $0 < x < a$, в котором имеется рассматриваемое случайное двумерное магнитное поле. Токов текущих по z и создающих поле $\mathfrak{b}$ нет ни справа, ни слева вне этого слоя.

---

1) При этом не исключено, впрочем, что часть области с $\phi < \epsilon$ образует озера внутри островов, не связанные с перколирующим океаном.

2) Отметим, однако, что длина изолинии $l(\epsilon)$ при данном ϵ имеет статистическое распределение, и $l \sim \epsilon^{-2,4}$ является скорее оценкой максимума, а не среднего значения l.

Зададим одно значение n_1 слева ($x = 0$) и другое n_2 справа от слоя ($x = a$). Поток частиц равен

$$q_x = D(n_1 - n_2)/a \qquad (5)$$

таково определение коэффициента диффузии. Однако, в рассматриваемой задаче по мере увеличения толщины слоя a уменьшается доля тех орбит, которые оказываются незамкнутыми, так как их пересекают границы $x = 0$ и $x = a$. Поэтому поток частиц убывает быстрее, чем a^{-1}, либо как a^{-m}, $m > 1$, либо экспоненциально как $\exp(-\alpha k_0 a)$. Но это и значит, что не существует определенного значения D, в пределе большого a эффективное значение D стремится к нулю.

Конечное (не равное нулю) значение D получается при конечном ларморовом радиусе r.

В аналогичной задаче о двумерном вихревом бездивергентном стационарном движении жидкости турбулентный коэффициент диффузии окажется конечным лишь в случае, если конечна, отлична от нуля, молекулярная диффузия μ. При этом D пропорционально дробной степени μ.

Задачи о двумерном стационарном движении в этом отношении подобна задаче об одномерном нестационарном движении [3]. Аналогичное сходство между каустиками при равном числе переменных (например x и t или x и y) отмечено в [4].

В истинно трехмерной стационарной задаче так же, как и в двумерной нестационарной задаче (три переменные x, y, z или x, y, t) диффузия электронов вдоль линий магнитного поля D_e, так же, как и турбулентная диффузия в гидродинамическом движении D_t, отличны от нуля, и в пределе $\mu = 0$, $r = 0$.

В самом деле, рассмотрим, например, нестационарную двумерную задачу с произвольной разрывной зависимостью от времени. Частица движется по замкнутой силовой линии вокруг одного центра в течение какого-то времени τ_1 и перемещается на определенное расстояние (не превышающее, впрочем, орбиты даже при большом τ_1). Однако, затем в течение следующего интервала времени τ_2 частица движется по новой траектории, не зависимой от первой.

При этом, очевидно, после нескольких шагов перемещение растет пропорционально корню из времени, т.е. по типичному диффузионному закону.

В трехмерном стационарном векторном поле существуют области замкнутых линий (Колмогоров, Арнольд и др.), но эти области отнюдь не заполняют все пространство, существует и конечная доля перколирующих линий, вдоль которых осуществляется перенос от $-\infty$ до $+\infty$ в любом направлении в случайном поле.

Общее соотношение между ролью μ, r в двумерном ($2D$) и трехмерном ($3D$) случае по-видимому, такое же, как и в теории быстрого и медленного динамо [5]. Величины D_e, D_t в пределе $\mu, r \to 0$ зависят ($2D$) или не зависят ($3D$) от μ, r, однако для построения полной картины и в особенности для нахождения градиентов в самых малых масштабах значения r и μ всегда существенны. Зависимость поля от z и t, влияние μ, r, а также дрейфа электронов в этом случае рассматривается во второй части работы [2].

Остановимся вкратце на задаче о двумерном поле, состоящем из двух частей — постоянного и случайного поля. Малое случайное поле лишь искривляет силовые линии постоянного поля. В отдельных местах, где случайное поле достаточно велико, отщепляются острова замкнутых силовых линий по типу локальных катастроф, связанных с возникновением локального максимума ϕ и сопряженного с ним перевала. Интересен противоположный случай, когда на заданное случайное поле наложено весьма малое постоянное поле.

Известно, что в этом случае магнитный поток, соответствующий постоянному полю, сжимается в узкие полоски (каналы), протекающие (создающие перколяцию) в среднем, несмотря на извилистость, в направлении постоянного поля. В этих каналах величина поля по модулю порядка среднеквадратичного хаотического поля; малость постоянного поля проявляется в том, что каналы оказываются узкими.

Это утверждение, принадлежащее Розенблюту, [1] проливает свет на то, как в случае хаотического поля характер фурье-спектра влияет на перколяцию и диффузию.

Вернемся к случаю хаотического поля в полосе конечной ширины. Для этой полосы волновой вектор $k_{min} = a^{-1}$ соответствует полю, практически не отличающемуся от постоянного. Если $\phi_k \sim k^m$ то $b_k \sim k^{m+1}$, и модуль поля, постоянного в масштабах полосы, получим из условия

$$\bar{b} = (<b_k^2>_{k < a^{-1}})^{1/2} \sim (\int_0^{a^{-1}} k^{2m}\, k\, dk)^{1/2} \sim a^{-m-2}. \qquad (6)$$

Перколяция по каналам, не убывающим с увеличением a, имеет место при $m = -2$. Двумерное магнитное поле возникает при наличии текущих по оси z токов, причем очевидно $\Delta\phi = j_z$.

Следовательно, $m = -2$ в длинноволновой части спектра ϕ соответствует для токов $(j_z)_k = k^2\, \phi_k = k^0 =$ const, т.е. белому шуму. Итак, поучительно, что случайные – а под этим названием часто понимают именно некоррелированные, т.е. со спектром белого шума, токи дают из-за дальнодействия такие средние поля, при которых все же есть перколяция в пределе $a \to \infty$. Она исчезает лишь при $m > -2$, т.е. антикоррелированных токах.

Отметим наконец, еще один частный случай. Представим себе постоянное поле в идеально проводящей жидкости. Движение этой жидкости усиливает поле. Сохранение потока здесь связано с тем, что при хаотических поворотах поля стремится к нулю средний косинус угла поля с первоначальным направлением. До тех пор, пока соблюдается условие вмороженности, силовые линии не разрываются – перколяция остается полной. Картина узких каналов в этой ситуации возникает лишь через достаточное время после начала движения. В этой картине электроны, находящиеся в области замкнутых линий, движутся лишь вместе с общим гидродинамическим движением жидкости, тогда как собственная скорость электронов в каналах гораздо больше.

Пользуюсь случаем поблагодарить Б.Б.Кадомцева, С.М.Козлова, С.А.Молчанова, О.П.Погуце и Д.Д.Соколова за поучительные дискуссии.

Литература

1. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.
2. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Plasma Physics a. controlled nuclear fusion research, 1978 (Proc. VII Intern. Conf. Insbruck 1978), I, IAEA, Vienna, p. 649, 1979 .
3. *Зельдович Я.Б.* Докл. АН СССР, 1982, **266**, 821.
4. *Арнольд В.И.* Вестник МГУ, Математика и механика, 1982, № 6, 50.
5. *Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* ЖЭТФ, 1980, 78, 980.

Поступила в редакцию
2 марта 1983 г.
После переработки
10 мая 1983 г.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

[1] Я благодарен Б.Б.Кадомцеву за сообщение об этом.