Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.2, стр. 55 – 57 *25 июля 1983 г.*

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

А.А.Рухадзе, В.Ю.Шафер

Показано существование нового вида апериодической неустойчивости квазинейтрального электронного пучка, которая в длинных системах превалирует над известной пирсовской неустойчивостью (ПН), имеющей тот же порог по току. Проведена оценка инкремента при малой надпороговости.

1. Одним из главных параметров любого экспериментального устройства, используемого при работе с сильноточными электронными пучками, является предельный ток пучка, который можно пропустить через это устройство. В данном сообщении речь пойдет о предельных токах квазинейтральных пучков, объемный заряд которых в равновесном состоянии нейтрализован положительными ионами. Ограничимся рассмотрением электростатических (потенциальных) неустойчивостей, ответственных за ограничение тока нерелятивистских пучков [1]. В этом приближении пренебрегается собственными магнитными полями пучка и запаздыванием потенциалов (скорость света $c \to \infty$). Кроме того, в нулевом приближении по малому параметру $(m/M)^{1/3}$ (m, M— массы электронов и ионов) ионы можно считать неподвижными ($M \to \infty$).

Известно, что в дрейфовом пространстве конечной длины L ток нейтрализованного пучка ограничивается развитием апериодической потенциальной ПН [2] с инкрементом $\sim 1/L$. Согласно работе [3], обобщившей плоскую задачу Пирса на цилиндрическую геометрию, предельная плотность тока $j_п$ однородного в радиальном сечении пучка через круглый металлический волновод (ограниченный на торцах металлическими фольгами, составляющими вместе с боковыми стенками эквипотенциальную поверхность $\Phi = 0$) равна

$$j_п = \frac{m V_0^3}{4\pi e} \left[(2,4/R)^2 + (\pi/L)^2 \right]. \qquad (1)$$

При этом максимальный инкремент ПН δ_{max} и инкремент вблизи порога δ даются выражениями

$$\delta_{max} \cong \frac{V_0}{L} (R/L)^2 ; \quad \delta \cong \frac{V_0}{L} \Delta j, \qquad \Delta j \equiv \frac{j - j_п}{j_п} \qquad (2)$$

($j = eN_0 V_0$; N_0, V_0 – равновесные плотность и скорость электронов пучка; $e > 0$ – заряд электрона; R – радиус волновода). Из (2) следует, что $\delta_{пн} \to 0$ при $L \to \infty$. Отсюда считалось, что в длинных ($L \gg R$) системах, в пределе – в полубесконечном волноводе с металлической фольгой на входе, пучок устойчив к потенциальным возмущениям, и через такие системы – в рамках принятых предположений – можно пропускать ток любой величины. Ниже показывается, что это неверно. В полубесконечной трубе с „идеально проводящими" стенками квазинейтральный пучок также неустойчив, при этом предельный ток равен пирсовскому (1), а инкремент апериодической потенциальной неустойчивости выражается формулой (13).

2. Поставим начальную задачу. В невозмущенном состоянии однородный моноэнергетический нейтрализованный электронный пучок полностью заполняет полубесконечный волновод, двигаясь – в положительном направлении оси $0z$ – в сторону его открытого конца. На стенках волновода и входной фольге ($z = 0$) поддерживается потенциал $\Phi = 0$, вдоль оси волновода приложено бесконечное магнитное поле, препятствующее радиальному движению электронов. Эволюция начального возмущения плотности электронов (или скорости –

это неважно) описывается следующей системой линеаризованных уравнений и граничных условий:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta N+N_0\frac{\partial\delta V}{\partial z}=0,\quad \delta N(r,\ z;t=0)=\delta N^0(r,z);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta V=\frac{e}{m}\,\frac{\partial\delta\Phi}{\partial z},\quad \delta V(r,\ z;t=0)=0; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\delta\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\delta\Phi}{\partial z^2}=4\pi e\,\delta N; \qquad (4)$$

$$\delta N(r=R,z;t)=\delta N(r,z=0;t)=0,$$

$$\delta V(r=R,z;t)=\delta V(r,z=0;t)=0; \qquad (5)$$

$$\delta\Phi(r=R,\ z;t)=\delta\Phi(r,z=0;t)=0,\qquad |\delta\Phi|<\infty. \qquad (6)$$

Кроме того, в качестве дополнительного условия при $z\to\infty$ потребуем, чтобы возмущения плотности $\delta N(z)$ и скорости $\delta V(z)$ как функции от z были представимы интегралом Фурье (см.(8)). Рассматриваются только азимутально-симметричные возмущения, зависящие от цилиндрических координат $(r,\ z)$. Что касается зависимости от r, ограничимся решениями, имеющими вид какой-либо одной из собственных мод радиальной части уравнения Пуассона (4) с граничными условиями (6). Это есть функции Бесселя $J_0(\lambda_s r)$, где $\lambda_s\equiv\mu_s/R$, $\mu_s>0$ – корни уравнения $J_0(\mu_s)=0$, $s=1,\ 2,\ \ldots$. Ограничение одномодовыми азимутально-симметричными решениями не принципиально и служит лишь для упрощения вычислений.

3. Итак, решение системы (3) – (6) ищем в виде $\delta N(r,z;t)=J_0(\lambda_s r)\,n(z,t)$, и аналогично для δV, $\delta\Phi$; при этом подразумевается, что и $\delta N^0(r,z)=J_0(\lambda_s r)\,n^0(z)$. Для таких решений начальная задача (3) – (6) сводится к эквивалентному интегральному уравнению относительно $n_{\sin}(k,\sigma)$ – трансформанты Лапласа по временной переменной t и sin – трансформанты Фурье по координате z от возмущения $n(z,t)$:

$$n_{\sin}(k,\sigma)=\frac{n^0_{\sin}(k)}{2}\left\{\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega_-^2(k)}+\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega_+^2(k)}\right\}+\frac{n^0_{\cos}(k)}{2}\left\{\frac{\omega_-(k)}{\sigma^2+\omega_-^2(k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_+(k)}{\sigma^2+\omega_+^2(k)}\right\}+\frac{\omega_+(k)-\omega_-(k)}{2\pi}\left\{\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega_-^2(k)}-\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega_+^2(k)}\right\}\int_0^\infty n_{\sin}(\kappa,\sigma)\frac{\kappa\,d\kappa}{\kappa^2+\lambda_s^2}. \qquad (7)$$

Здесь

$$n_{\sin}(k,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty n(z,\sigma)\sin(kz)\,dz,\quad n(z,\sigma)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,n(z,t)\,dt; \qquad (8)$$

$n^0_{\sin,\cos}(k)$ – sin- и cos-трансформанты Фурье от начального возмущения $n^0(z)$;

$$\omega_\pm(k)=k\,V_0\left(1\pm\sqrt{\frac{k_c^2+\lambda_s^2}{k^2+\lambda_s^2}}\right) \qquad (9)$$

— быстрая и медленная волны пространственного заряда пучка;

$$k_c^2 \equiv \frac{\omega_b^2}{V_0^2} - \lambda_s^2 \equiv \lambda_s^2 \frac{j - j^*}{j^*} \equiv \lambda_s^2 \, \Delta j, \tag{10}$$

$$j^* = \frac{m V_0^3}{4\pi e} \lambda_s^2 \, ; \quad s = 1, 2, \ldots ; \tag{11}$$

$\omega_b^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$. Таким образом, задача об эволюции начального возмущения свелась к задаче на собственные значения и собственные функции для линейного однородного интегрального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (7). Правая часть этого однородного уравнения (правая часть (7) без слагаемых, содержащих $n^0(k)$) как функция от k и есть при известном значении σ — собственная функция, поскольку интеграл в правой части — константа (C_s). Условие $C_s \neq 0$ дает дисперсионное уравнение, определяющее все собственные частоты σ нашей системы:

$$1 = \sum_{\nu = +,-} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega_\nu^2(k)} \left(\frac{d\omega_\nu(k)}{dk} - \frac{\omega_\nu(k)}{k} \right) dk \tag{12}$$

(временная зависимость возмущенных величин: $\sim \exp(\sigma t)$, где σ — корни уравнения (12)).

4. При $k_c^2 > 0$, т.е. при $j > j^*$ уравнение (12) имеет, во-первых, корень $\sigma = 0$, что соответствует стационарной волне плотности $n(z, t) \sim \sin(k_c z)$. Во-вторых, оценка интеграла (12), проведенная для $0 < \Delta j \ll 1$, показывает существование положительного корня

$$\sigma \cong 0,2\, \lambda_s V_0 (\Delta j)^{3/2} \equiv 0,2\, \mu_s \frac{V_0}{R} (\Delta j)^{3/2}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

который дает линейный инкремент апериодической неустойчивости при малой надпороговости по току. Найденная неустойчивость не является продолжением ПН в ограниченной трубе на случай $L \to \infty$, так как получена для других собственных решений системы (3) — (6). Нас интересовали решения, локализованные (вообще говоря) в области конечных z, другими словами — представимые в виде волнового пакета (8) с действительными $0 < k < \infty$. Данная неустойчивость, нечувствительная к границе $z = L \gg R$, и определяет линейную стадию образования виртуального катода в длинных системах. Совпадение предельных токов (1) и (11) естественно: в обоих случаях обратная связь осуществляется одной и той же — медленной волной пространственного заряда $\omega_-(k)$, которая при $k_c^2 > 0$ имеет в лабораторной системе координат отрицательную фазовую скорость для $0 < k < k_c$ и отрицательную групповую — для $0 < k < \sim k_c/2$.

Литература

1. *Незлин М.В.* Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982.

2. *Pierce J.R.* J. Appl. Phys., 1944, 15, 1721.

3. *Карбушев Н.И., Рухадзе А.А.* Кр. сообщ. по физике ФИАН, 1979, № 4, 20.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в реакцию
16 мая 1983 г.