

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И „ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ” В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕАВТОНОМНОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.С.Афраймович, М.И.Рабинович, А.Д.Угодников

На примере ангармонического осциллятора, потенциальная функция которого периодически зависит от времени, демонстрируются новые типы переходов в стохастическом поведении простых динамических систем. Обнаружен, в частности, переход „хаос – хаос”.

1. Ангармонический осциллятор – элементарная модель нелинейной физики – сейчас вновь стал объектом пристального внимания теоретиков и экспериментаторов ¹⁻⁴. Это объясняется, в первую очередь, обнаружением в простых (с малым числом степеней свободы) физических системах нетривиального – стохастического поведения. Стохастическая динамика есть результат сильной неустойчивости индивидуальных финитных движений нелинейной системы и никак не связана с привнесением извне чего-то „истинно” случайного – шумов или флуктуаций. Интенсивные исследования физиков и математиков привели к тому, что сейчас уже можно считать выясненными основные пути переходов детерминированной системы из режима регулярных колебаний в стохастический режим ^{5,6}. В то же время об изменении свойств самого стохастического режима при изменении параметров известно очень немного. Так, например, развитие стохастичности (нарастание пульсаций, уширение спектра и т.д.) в системах с большим числом степеней свободы обычно ассоциируется лишь с увеличением числа мод, вовлекаемых при увеличении степени неравновесности системы в процессе нелинейного взаимодействия.

Здесь мы показываем, что и в очень простой системе возможна качественная перестройка свойств стохастического движения, сопровождающаяся в критических точках существенным изменением зависимости его характеристик от параметра. К числу таких характеристик стохастического движения относятся в частности: а) параметр, характеризующий степень связи между нормальными переменными в режиме установившихся стохастических колебаний, количественным его выражением может служить фрактальная размерность стохастического множества в фазовом пространстве ⁸; б) интенсивность стохастического движения (это может быть, например, интегральный спектр мощности осцилляций). Кроме того, может оказаться полезным описание аттракторов еще и по степени локализации стохастического множества в фазовом пространстве вблизи регулярных траекторий определенного вида – периодических траекторий, сепаратрис и т.д. ⁹.

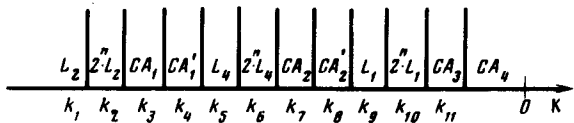
2. Исследовался параметрически возбуждаемый ангармонический осциллятор

$$u_{tt} + ku_t + (1 + q \cos \Omega t)u + u^3 = 0, \quad (1)$$

демонстрирующий стохастическое поведение в широкой области параметров k, q ³. Анализировалось (численно) отображение Пуанкаре секущей плоскости $t = \text{const}$ в себя через период $T = 2\pi/\Omega$. При изменении k и q контролировались спектр мощности $P(\omega)$, средняя мощность $N = \int P(\omega) d\omega$ и фрактальная размерность $D = 2 + |\lambda^*/(k + \lambda^*)|$, где λ^* – средний по стохастическому множеству положительный ляпуновский характеристический показатель (энтропия Колмогорова – Синая ⁷).

На рис. 1 приведена схема основных переходов в стохастическом движении (1), обнаруженных при уменьшении параметра k . Наблюдались переходы трех основных типов: 1) возникновение из „сгущения” траекторий неустойчивого и устойчивого периодического движения, отвечающего режиму регулярных колебаний ($k = k_4, k = k_8$); 2) появление цепочки удвоения периода устойчивого периодического движения ($k_1 \leq k < k_2, k_5 \leq k < k_6, k_9 \leq k <$

$< k_{10}$), ведущей к рождению странного аттрактора ($k = k_2, k = k_6, k = k_{10}$); 3) скачкообразное увеличение области, в которой располагается странный аттрактор ($k = k_3, k = k_7, k = k_{11}$), сопровождаемое скачком интегрального спектра мощности. Нетривиальными здесь представляются переходы через критические точки k_3, k_7 и k_{11} . Ограничимся анализом перехода через k_{11} .



конечная цепочка бифуркации удвоения периодического движения L_i ; CA – странный аттрактор)

Рис.1. Диаграмма последовательности переходов через критические точки K_j при уменьшении диссипации (L_i – устойчивое периодическое движение периода iT ; $2^n L_i$ – бес-

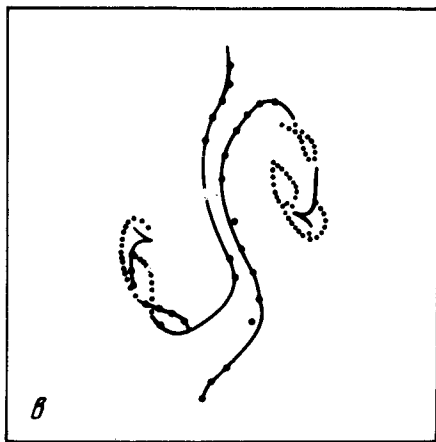
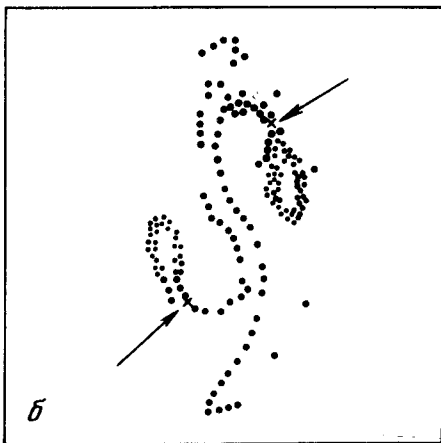
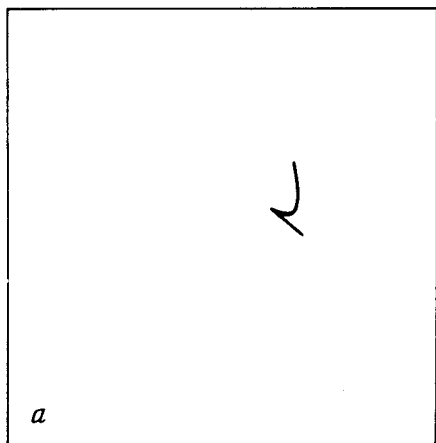


Рис.2. а – Портрет странного аттрактора на секущей u_t через период $T = 2\pi/\Omega$. Размеры по вертикали $|u_t| \leq 50$, по горизонтали – $|u| \leq 10$. Число периодов $t/T \sim 3 \cdot 10^3$, $k = 0,4576$; б – непритягивающее стохастическое множество B ($k = 0,4576$, стрелками указаны седловые периодические движения $\Gamma_1, \bar{\Gamma}_1$); в – странный аттрактор после „фазового перехода” ($k = 0,4575$)

3. Для понимания механизма этого перехода нам понадобится и предыстория поведения осциллятора при уменьшении диссипации от значения k_3 до k_{10} . Дело в том, что к „моменту”, когда k становится равным k_{11} , в фазовом пространстве неавтономного осциллятора уже существует разившееся стохастическое множество B , которое, однако, не является притягивающим. „Взаимоотношения” этого непритягивающего множества со странным аттрактором A_3 (см. рис.1) при $k \approx k_{11}$ и определяют интересующие нас феномены.

При $k = k_8$ из сгущения траекторий рождаются два периодических движения — седловое Γ_1 и устойчивое L_1 , которое при $k = k_9$ теряет устойчивость, передав ее периодическому движению удвоенного периода. В интервале $k_9 < k < k_{10}$ осуществляется бесконечная цепочка бифуркаций удвоения периода, завершающаяся рождением странного аттрактора A_3 ¹⁾. Его область притяжения ограничена устойчивой сепаратрисой Γ_1 . При дальнейшем уменьшении диссипации — $k \lesssim k_{11}$ — аттрактор A_3 разбухает, поглощая последовательно неустойчивые периодические движения Γ^s , появившиеся в результате бифуркаций удвоения, когда k уменьшалось от k_9 до k_{10} ²⁾. При $k \lesssim k_{11}$ на базе Γ_1 появляется гомоклиническая структура B_3 , которая объединяется с ранее возникшими структурами B_1 и B_2 (см. рис.1), образуя непритягивающее стохастическое множество B . Это множество (в отличие от аттрактора A_3) располагается в обширной области фазового пространства, и, кроме того, для него характерно наличие весьма быстрых движений (в структурах $B_{1,2}$ и B_3). При $k \gtrsim k_{11}$ граница A_3 пересекает устойчивую сепаратрису Γ_1 , и таким образом аттрактор A_3 объединяется с B , образуя симметрично расположенный аттрактор A_4 (см. рис.2) ³⁾.

Поглощение обширного стохастического множества B сильно локализованным аттрактором A_3 и приводит к „скачку” средней мощности пульсаций и фрактальной размерности странного аттрактора (рис.3).

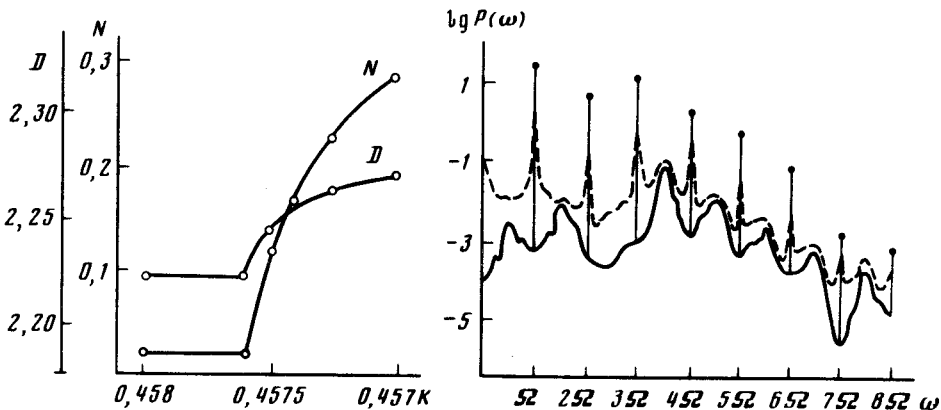


Рис.3. а — Изменение средней мощности и фрактальной размерности странного аттрактора в окрестности перехода ($q = 50$, $\Omega = 2,04$); б — спектр мощности переменной до перехода ($k = 0,4576$) и сразу после ($k = 0,4575$ — пунктир) — $\Delta k = 10^{-4}$

Движение осциллятора сразу после возникновения A_4 очень своеобразно — основную часть времени изображающая точка проводит в области, занятой прежде A_3 , попадая лишь изредка в B , где ввиду сильной неустойчивости траекторий находится малое время. Таким образом осциллограмма движения выглядит как стохастические колебания небольшой интенсивности, прерываемые сильно „турбулентными” всплесками — перемежаемость „хаос — хаос”.

1) Движению на этом аттракторе соответствуют несимметричные колебания осциллятора — на секущей $u, u_t > 0$. Симметрия (1) проявляется в том, что одновременно с A_3 существует и зеркальный аттрактор \bar{A}_3 , локализованный в области $u, u_t < 0$. Реализуемость одного из них зависит от начальных условий.

2) Границей аттрактора A_3 можно приближенно считать неустойчивую сепаратрису того седлового периодического движения из Γ^s , которое имеет наименьший период и еще не поглотилось аттрактором.

3) Принципиальная возможность поглощения аттрактором неустойчивого стохастического множества в иной ситуации (для аттрактора типа Лоренца) отмечалась в ¹⁰.

В заключение подчеркнем, что при обнаруженных переходах типа „ k_{11} ” существенно изменяются все основные характеристики стохастического движения — о скачках размерности странного аттрактора и средней мощности мы уже говорили, меняется и вид колебаний — до перехода пульсации были связаны с блужданием изображающейся точки лишь в области локализации A_3 , после перехода аттрактор располагается вблизи новой структуры, определяемой еще и B .

Авторы признательны А.В.Гапонову и Б.Б.Кадомицеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Linsay P.S.* Phys. Rev. Lett., 1981, 47, 1349.
2. *Testa J.S., Perez J., Jeffries C.* Phys. Rev. Lett., 1981, 48, 714.
3. *Izrailev F.M., Rabinovich M.I., Ugodnikov A.D.* Phys. Lett., 1981, 87A, 16.
4. *Holmes P.* Phil. Trans. Roy. Soc., 1979, A292, 1394.
5. *Рабинович М.И.* УФН, 1978, 125, 123.
6. *Eckmann P.* Rev. Mod., Phys., 1981, 53, 643.
7. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория, М.: Наука, 1980.
8. *Ledrappier F.* Comm. Math. Phys., 1981, 81, 229.
9. *Гольштик М.А., Штерн В.Н.* ДАН СССР, 1981, 237, 1319.
10. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников П.П.* Труды ММО, 1982, 44, 150.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в реакцию
2 июня 1983 г.