Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.2, стр. 79 – 82 25 июля 1983 г.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, Я.Г.Синай,
К.М.Ханин, Л.Н.Щур

Показано, что количественные параметры развитой ранее [1] статистической теории колебательной эволюции космологических моделей вблизи особенности могут быть вычислены точным образом.

Колебательный режим приближения к особой точке был впервые открыт для вакуумной однородной космологической модели типа IX по Бианки (см. [2]) . Характер эволюции модели может быть описан тремя „масштабными функциями" $a(t), b(t), c(t)$, определяющими изменение со временем t масштабов длин в трех различных направлениях в пространстве. Колебательный режим складывается из бесконечной последовательности сменяющих друг друга (при $t \to 0$) серий колебаний, в каждой из которых колеблются две из функций a, b, c, а третья монотонно убывает (эти серии были названы в [2] эрами); при переходе от одной эры к следующей одна пара колеблющихся функций заменяется другой. Амплитуда колебаний растет в пределах каждой эры и, в особенности, при переходе от одной эры к другой, но произведение abc монотонно убывает – примерно как t. Эры сгущаются при $t \to 0$; более адекватной переменной для описания их смен является неограниченно возрастающее „логарифмическое время" $\Omega = -\ln t$.

Обозначим посредством $k_0, k_1, k_2, \ldots$ „длины" последовательных эр (измеренные числом содержащихся в них колебаний), начиная от некоторой начальной k_0. Оказывается, что эта последовательность определяется числами $x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(0 < x_s < 1)$, связанными друг с другом преобразованием

$$x_{s+1} = \{ 1 / x_s \}, \tag{1}$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа; при этом длины $k_s = [1/x_{s-1}]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. И.М.Лифшицем и двумя из нас [1] было обращено внимание на то, что закон смены длин эр согласно (1) приводит к самопроизвольной стохастизации поведения модели при ее эволюции к особенности ; при этом „забываются" начальные условия, заданные в некоторый момент $t = t_0 > 0$ (ниже эта статья цитируется как I).

Важность колебательного режима в однородной модели связана с тем, что он является прототипом общего неоднородного космологического решения уравнений Эйнштейна (вблизи особенности) – см. [3]. Хотя неоднородность и наличие материи приводят к появлению некоторых новых свойств (вращение осей, к которым относятся масштабные функции a, b, c), но закон (1) остается прежним. Таким образом, связанная с этим законом стохастичность оказывается наиболее общим свойством вблизи особенности космологических моделей, основанных на классических уравнениях Эйнштейна.

Знание источника стохастичности позволяет построить, со значительной полнотой, статистическую теорию поведения космологической модели в асимптотической близости к особенности. Но при определении параметров этой теории в I было использовано приближение, точность которого нельзя определить заранее. Цель данной работы – показать, что эти параметры могут быть определены точным образом.

Исходным пунктом теории является известная формула Гаусса $w(x) = 1/(1+x)\ln 2$, определяющая плотность распределения вероятностей на отрезке $[0, 1]$ значений $x_s \equiv x$ после многократного повторения преобразования (1) (как мы будем говорить – в стационарном, т.е. независящем от s, пределе) [1]. Отсюда следует формула $W(k) = \ln((k+1)^2/k(k+2))/\ln 2$ для распределения вероятностей целочисленных длин эр. Медленность (как k^{-2}) убывания этой функции при $k \to \infty$ приводит к тому, что для получения устойчивых статистических распределений приходится прибегать к логарифмированию интересующих нас физических величин.

Основой дальнейшего анализа является полученные в I рекуррентные формулы, связывающие характеристики двух последовательных эр:

$$\Omega_{s+1}/\Omega_s = 1 + \delta_s k_s (k_s + x_s + 1/x_s) \equiv \exp \xi_s, \tag{2}$$

$$\delta_{s+1} = 1 - \frac{(k_s/x_s + 1)\,\delta_s}{1 + \delta_s k_s (k_s + x_s + 1/x_s)}; \tag{3}$$

они справедливы в асимптотическом пределе, когда $\ln \Omega/\Omega \to 0$ (в I формула (3) была приведена с опиской в знаменателе). Здесь Ω_s – момент начала s-ой эры, а δ_s измеряет в единицах Ω_s начальную амплитуду колебаний α_s логарифма масштабных функций: $\alpha_s = \delta_s \Omega_s$ $(0 \leqslant \delta_s \leqslant 1)$. Величина δ_s имеет устойчивое стационарное статистическое распределение $P(\delta)$ и устойчивое (малая относительная флуктуация) среднее значение. В I для их определения было использовано предположение (заведомо приближенное) о статистической независимости случайной величины δ_s от случайных величин k_s, x_s. Ниже дается точное решение этой задачи.

Поскольку мы интересуемся статистическими свойствами в стационарном пределе, целесообразно перейти к расширению преобразования (1), продлив его неограниченно в сторону отрицательных s. Такая двусторонняя бесконечная последовательность $X = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ однородна по своим статистическим свойствам (а x_0 теряет смысл „начального" условия). Последовательность X эквивалентна последовательности целых чисел $K = (\ldots, k_{-1}, k_0, k_1, \ldots)$. Обратно, каждое число из X выражается через числа из K бесконечной цепной дробью

$$x_s = 1/(k_{s+1} + 1/(k_{s+2} + 1/(k_{s+3} + \ldots)) \equiv x^+_{s+1}.$$

---

1) Регулярная эволюция модели согласно правилу (1) может нарушаться появлением „аномальных" эр (названных в [2] случаем малых колебаний). Важно, однако, что в асимптотическом пределе сколь угодной близости к особенности вероятность появления таких „опасных" случаев стремится к нулю, как это доказано в I §4.

Введем также величины, определяемые цепной дробью с обратной последовательностью знаменателей:

$$x_s^- = 1/(k_{s-1} + 1/(k_{s-2} + 1/(k_{s-3} + \dots).$$

Рядом преобразований формула (3) может быть приведена к виду

$$x_s (1-\delta_{s+1})/\delta_{s+1} = 1/(k_s + x_{s-1}(1-\delta_s)/\delta_s).$$

Отсюда следует, путем итерации, что $x_s(1-\delta_{s+1})/\delta_{s+1} = x_{s+1}^-$ и затем $\delta_s = x_s^+/(x_s^+ + x_s^-)$.

Величины x_s^+ и x_s^- имеют совместное стационарное распределение $P(x^+, x^-)$, для нахождения которого исходим из совместного преобразования

$$x_{s+1}^+ = \{1/x_s^+\}, \quad x_{s+1}^- = 1/([1/x_s^+] + x_s^-). \tag{4}$$

В противоположность (1), оно взаимно-однозначно (в единичном квадрате изменения x^+ и x^-)[1]. Поэтому стационарность распределения выражается просто функциональным уравнением

$$P(x_{s+1}^+, x_{s+1}^-) = P(x_s^+, x_s^-) J(x_s^+, x_s^-),$$

где J – якобиан преобразования (4). Нормированное решение этого уравнения:

$$P(x^+, x^-) = 1/(1 + x^+x^-)^2 \ln 2 \tag{5}$$

(его интегрирование по x^+ или x^- дает $w(x)$). Поскольку δ_s выражается через x_s^+ и x_s^-, то отсюда можно получить искомое

$$P(\delta) = 1/(|1 - 2\delta| + 1)\ln 2. \tag{6}$$

Среднее значение $<\delta> = 1/2$ уже в силу симметрии этой функции.

Согласно I, „дважды-логарифмический" интервал времени протекания s последовательных эр $\tau_s \equiv \ln(\Omega_s/\Omega_0) = \Sigma\, \xi_p$ (сумма от $p=1$ до $p=s$). Среднее значение $<\tau_s> = s<\xi>$. Выражение ξ_s из (2) может быть приведено к виду

$$\xi_s = \ln(\delta_s/(1-\delta_{s+1}) x_{s-1} x_s).$$

Заметив, что $<\ln\delta_s> = <\ln(1-\delta_{s+1})>$ и $<\ln x_{s-1}> = <\ln x_s>$, получим

$$<\xi> = -2<\ln x> = \pi^2/6\ln 2 = 2{,}37.$$

При больших s точные значения τ_s распределены вокруг $<\tau_s>$ по гауссовому закону с плотностью

$$\rho(\tau_s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp\{-(\tau_s - <\tau_s>)^2/2D\} \tag{7}$$

---

1) Приведение преобразования ко взаимно-однозначному виду производилось уже Черновым и Барроу [4] – для других переменных и без применений к рассматриваемым здесь задачам. Что касается статей Барроу [5], то они не содержат ничего, сверх взятой из I основной идеи о связи стохастичности космологических моделей с преобразованием (1) и распределениями $w(x)$ и $W(k)$ (не считая повторения ряда известных положений общей эргодической теории).

(см. I § 4). Вычисление дисперсии D более сложно, так как требует знания не только $<\xi^2>$, но средних $<\xi_0 \xi_p>$. Оказывается удобным перегруппировать члены в сумме $\Sigma \xi_p$, опустив слагаемые, не растущие с s; таким образом можно получить

$$\Sigma \xi_p = \Sigma \ln (1/x_p^+ x_p^-) \equiv \Sigma \eta_p .$$

Дисперсия

$$D = s \{ <\eta^2> - <\eta>^2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (<\eta_0 \eta_p> - <\eta>^2) \} .$$

Среднее $<\eta> = <\xi>$, а для среднего квадрата можно получить $<\eta^2> = 9\zeta(3)/2\ln 2 = 7{,}80$. Без учета корреляций получилось бы $D = 2{,}17\, s$. Учет же корреляций с $p = 1, 2, 3, 4$ (вычисленных с помощью ЭВМ) приводит к значению $D = (3{,}5 \pm 0{,}1)\, s$.

Литература

1. *Лифшиц Е.М., Лифшиц И.М., Халатников И.М.* ЖЭТФ, 1970, **59**, 322.
2. *Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М.* УФН, 1970, **102**, 463; Adv. Phys., 1970, **19**, 525.
3. *Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М.* ЖЭТФ, 1971, **60**, 1969; ЖЭТФ, 1972, **62**, 1606; Adv. Phys., 1982, **31**, 639
4. *Chernoff D.F., Barrow J.D.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 134.
5. *Barrow J.D.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 963 ; Gen. Rel. Grav., 1982, **14**, 523, ; Phys. Reports, 1982, **85C**, 1.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 июня 1983 г.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР