Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 12, стр. 575 – 577 *20 июня 1983 г.*

ЛОКАЛИЗАЦИЯ В НЕСОИЗМЕРИМОМ ПОТЕНЦИАЛЕ: ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Л.А.Пастур, А.Л.Фиготин

Дано обобщение на многомерный случай одномерной модели, предложенной в [1]. В широкой области параметров найдены уровни энергии, состояния, локализованные при всех энергиях и показано, что проводимость экспоненциально мала при низких частотах. При слабой несоизмеримости локализация отсутствует.

В [1] была рассмотрена модель одномерной дискретной несоизмеримой структуры, описываемая гамильтонианом

$$H^{(1)}_{nn'} = w_{n-n'} + g\,\mathrm{tg}\,(\alpha n + \nu/2)\delta_{nn'}\,, \tag{1}$$

где w_n – четная и быстро убывающая функция номера узла одномерной цепочки, $g > 0$ – константа связи, $\alpha/2\pi$ – иррациональное число, $0 \leqslant \nu < 2\pi$ – начальная фаза. В случае, если $\alpha/2\pi$ не слишком хорошо аппроксимируется рациональными числами p/q, так что $|\alpha q - 2\pi p| > 2q^{-1}e^{-\gamma q}$, где γ – определенная, зависящая от энергии E и константы связи g, величина (см. ниже), в [1] найдены все уровни энергии и состояния, причем последние все оказываются экспоненциально локализованными. В настоящей работе мы хотим обратить внимание на то, что эта модель имеет естественный многомерный аналог с гамильтонианом

$$H^{(d)}_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} = w_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'} + g\,\mathrm{tg}(\alpha_{\mathbf{R}}/2)\,\delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}\,, \qquad \alpha_{\mathbf{R}} = \vec{\alpha}\mathbf{R} + \nu\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{R}$ – узлы d-мерной решетки, $w_{\mathbf{R}}$ – четная и быстро убывающая функция, ν такое же как в (1), $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_d)$ – фиксированный набор 2π независимых чисел, т. е. таких, что их любая линейная комбинация $\vec{\alpha}\mathbf{R}$ не кратна 2π. Оказывается, что с помощью элементарной алгебраической выкладки для функции Грина оператора $H^{(d)}$ можно получить удобное представление, основываясь на котором и удается осуществить весьма детальный и точный анализ модели в любой размерности (в [1] при анализе только одномерного случая был использован довольно непростой косвенный метод).

Положим $z = E + i\delta$, $G(z) = (H^{(d)} - z)^{-1}$, $G^{(0)}(z) = (W - z)^{-1}$, $\zeta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} = \exp(-i\alpha_{\mathbf{R}})\delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}$. Тогда нетрудно убедиться, что имеет место следующее тождество

$$G(z) = (1 + \zeta)(1 - M\zeta)^{-1} G^{(0)}(z + ig),$$
$$M = (ig - z + W)(ig - z - W)^{-1} . \tag{3}$$

Оператор ζ унитарен, а оператор M в импульсном представлении есть умножение на функцию $m(\mathbf{k})$, причем $|m(\mathbf{k})| < 1$ при $\delta > 0$. Поэтому при любой комплексной энергии ряд теории возмущений по $M\zeta$ сходится со скоростью геометрической прогрессии. В этом и состоит основное достоинство формулы (3). Проиллюстрируем его на простейшей задаче вычисления плотности состояний $\rho(E)$, для чего достаточно найти деленный на объем след G в макроскопическом пределе. Разложив оператор $(1 - M\zeta)^{-1}$ в (3) в ряд и используя независимость чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ легко убедиться, что след от всех членов ряда, содержащих ζ^l, $l \neq 0$ дает нулевой вклад. Поэтому искомая величина равна просто $G^{(0)}(z + ig)$, а тогда

$$\rho(E) = \pi^{-1} \operatorname{Im} V^{-1} \operatorname{Sp} G^{(0)}(E + ig) = \int \rho_0(E - E') p_C(E') dE' , \tag{4}$$

где $\rho_0(E)$ – плотность состояний трансляционно-инвариантной части (3), а $p_C(x) = g[\pi(g^2 + x^2)]^{-1}$ есть плотность вероятности распределения Коши. Таким образом, в модели (2) плотность состояний такая же, как и в так называемой модели Ллойда [2], в которой роль потенциала играют статистически независимые при разных $\mathbf{R}$ случайные величины $v_{\mathbf{R}}$ с плотностью вероятностей Коши. Можно показать, что для гамильтониана (2) плотность состояний имеет вид (4) и для целого ряда других форм несоизмеримости – например при полиномиальной зависимости $\alpha_{\mathbf{R}}$ от $\mathbf{R}$.

Вернемся к случаю $\alpha_{\mathbf{R}} = \vec{\alpha}\mathbf{R} + \nu$ и заметим, что результат (4) можно было бы получить и интегрированием диагонального элемента $G_{\mathbf{R}\mathbf{R}}$ из (3) по ν. Это есть проявление свойства самоусредняемости [2] в данной модели, и мы в дальнейшем будем использовать эту, более простую процедуру усреднения. Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ достаточно сильно независимы, так что для всех $\mathbf{R}$ и m

$$|\vec{\alpha}\mathbf{R} - 2\pi m| \geqslant A\, |\mathbf{R}|^{-\beta}, \quad \beta > d. \tag{5}$$

Такие векторы являются типичными в том смысле, что их множество имеет полную меру в d-мерном пространстве [3].

Обозначив через $f_{\mathbf{R}}$ коэффициент Фурье функции $f(\mathbf{k}) = -i \ln m(\mathbf{k})$, представим ее в виде

$$f(\mathbf{k}) = f_0 + t(\mathbf{k}) - t(\mathbf{k} + \vec{\alpha}), \tag{6}$$

где

$$t(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R} \neq 0} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}} (1 - e^{-i\vec{\alpha}\mathbf{R}})^{-1}. \tag{7}$$

Можно убедиться, что коэффициенты $f_{\mathbf{R}}$ при $|\mathbf{R}| \to \infty$ ведут себя как $R^{-1} G^{(0)}_{\mathbf{R}}(z + ig)$, т. е. даже при вещественных $z = E$ экспоненциально убывают: $f_{\mathbf{R}} \sim \exp(-\gamma R)$. Поэтому ряд (7) быстро сходится в силу (5) и функция $t(\mathbf{k})$ аналитична при $|\operatorname{Im} k_j| \leqslant \gamma$. Из (3) и (6) вытекает, что

$$G(z) = (1 + \zeta) e^{it} (1 - e^{-if_0}\zeta)^{-1} e^{-it} G^{(0)}(z + ig) \cdot \tag{8}$$

Так как оператор $1 - e^{-if_0}\zeta$ диагонален в $\mathbf{R}$-представлении, то из (8) найдем, что уровни энергии E_{nm} гамильтониана есть корни уравнения $f_0 = -\nu + \vec{\alpha}\mathbf{n} + 2\pi m$, а соответствующие состояния в R-представлении имеют вид

$$\psi_{\mathbf{n}m}(\mathbf{R}) = \chi(E_{\mathbf{n}m}, \mathbf{R}-\mathbf{n}), \tag{9}$$

где

$$\chi(E, \mathbf{R}) = (2\pi)^{-d} \int_{-\pi}^{\pi} d\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}-it}(w - E - ig)^{-1}. \tag{10}$$

Можно убедиться, что $f_0 = 2\pi N(E)$, где $N(E) = \int_{-\infty}^{E} \rho\, dE'$. Из этого соотношения, монотонности $N(E)$ и независимости компонент $\vec{\alpha}$ вытекает, что все уровни невырождены, а из (10) и аналитичности $t(\mathbf{k})$ – что все состояния экспоненциально убывают при удалении от центра локализации $\mathbf{n}$ в (9) с декрементом γ. Нетрудно найти и коррелятор плотность-плотность $p(E, \mathbf{R}) \doteq \lim_{\delta \to 0} \delta/\pi\, |G_{0\mathbf{R}}(E + i\delta)|^2$ [2]. Он также экспоненциально убывает при $\mathbf{R} \to \infty$ с декрементом 2γ. Наконец, для проводимости при нулевой температуре и $\omega \ll E_F$ получается следующая оценка

$$\sigma(\omega) \leqslant \text{const} \exp\{-A_1(\rho(E_F)/\omega)^{1/\beta}\},$$

где A_1 имеет тот же порядок, что и A в (5).

Перечисленные свойства модели (2) показывают, что в ней при любой энергии осуществляется сильная локализация, которая в неупорядоченных системах обычно имеет место лишь в флуктуационной области спектра (см. [2]). Это представляется довольно понятным в одномерном случае, так как потенциал в (1) принимает хотя и конечные, но сколь угодно большие значения в уходящей на бесконечность последовательности точек. Интересно, однако, что и в многомерном случае „лес" этих пиков оказывается настолько густым, что также приводит к экспоненциальной локализации состояний при всех энергиях. Подчеркнем, что все эти факты имеют место лишь в случае „достаточно иррациональных" α. При этом слева в (5) может стоять и функция $\exp(-\gamma' R)$ при $\gamma' < \gamma$. Но если $|\vec{\alpha}\mathbf{R} - 2\pi m| < A\exp(-BR^{1+\epsilon})$, $\epsilon > 0$, то как можно показать с помощью формулы (3) в спектре $H^{(d)}$ не будет ни одного связанного состояния (такой спектр в математической литературе называется сингулярно непрерывным). Однако эти случаи следует считать исключительными, поскольку множество соответствующих $\vec{\alpha}$ имеют нулевую меру [3].

Литература

1. *Grempel D.R., Fishman S., Prange R.E.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 833.
2. *Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
3. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1983 г.