Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.3, стр. 111 – 113 *10 августа 1983 г.*

О БРОУНОВСКОМ ДВИЖЕНИИ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

В.И.Мельников, С.В.Мешков

Построена квантовая теория взаимодействия частицы, движущейся в одномерном потенциале, с термостатом типа вязкой среды. Найдено равновесное распределение плотности и время жизни частицы в потенциальной яме конечной глубины при наличии туннелирования и диссипации.

Одномерное движение классической частицы массой m в потенциале $U(x)$ при наличии вязкой среды может быть описано уравнением Ланжевена $\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - m^{-1}U'(x) + \eta(t)$, где $\eta(t)$ – случайная сила, γ – коэффициент трения, являющийся единственной характеристикой взаимодействия с термостатом.

Для рассмотрения квантовой ситуации мы явно введем термостат в виде полубесконечной струны, прикрепленной к частице и натянутой перпендикулярно оси ее движения. В классическом пределе действие струны на частицу эквивалентно наличию вязкой среды с коэффициентом трения $\gamma = \rho s/m$, где ρ – линейная плотность струны, s – скорость бегущих волн на струне [1]; в квантовом случае также будет фигурировать только эта комбинация ρ и s. Тем самым число степеней свободы увеличивается, но зато мы получаем бездиссипативную динамическую систему, которую можно проквантовать обычным образом. Отметим, что излагаемый подход применим к любой среде с линейным откликом.

Прежде всего найдем равновесное распределение квантовых броуновских частиц по координате в потенциале $U(x)$ при температуре $T \equiv \beta^{-1}$. Состояние системы частица + струна полностью определяется смещением струны вдоль оси движения частицы $x(z)$ (z – расстояние вдоль струны, кооодината частицы $x \equiv x(0)$). Равновесное распределение частиц по координате $N(x)$ дается фейнмановским интегралом по периодическим траекториям $x(z, t)$ с мнимым временем

$$N(x) = \int \exp(-S/\hbar) D[x(z,t)], \tag{1}$$

$$x(z, \hbar\beta) = x(z, 0), \quad x(0, 0) = x(0, \hbar\beta) = x$$

с действием

$$S = \int_0^{\hbar\beta} \frac{1}{2} \left\{ m\dot{x}^2(0) + 2U(x(0)) + \int_0^\infty \left[\rho\dot{x}^2(z) + \rho s^2 \left(\frac{\partial x(z)}{\partial z}\right)^2 \right] dz \right\} dt. \tag{2}$$

Предполагая малость температуры по сравнению с характерным перепадом потенциала, при вычислении интеграла (1) можно считать потенциал U квадратичным вблизи точки x, т.е. удерживать в тэйлоровском разложении потенциала вблизи этой точки члены не выше второго порядка. (В случае гармонического осциллятора получаемое ниже выражение для $N(x)$ является точным). Разлагая координату частицы в ряд Фурье по мацубаровским частотам

$$x(0, t) = x + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t), \quad \omega_n \equiv 2\pi n/\beta\hbar$$

и минимизируя действие (2) по конфигурациям струны, получим

$$S = \beta\hbar \left\{ U(x) + U'(x)a_0 + \frac{m}{2}\left[m^{-1}U''(x)a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n^2 + \gamma\omega_n + m^{-1}U''(x))(a_n^2 + b_n^2)\right]\right\}.$$

Подставляя это выражение в (1) и интегрируя по a_n, b_n при условии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, найдем с точностью до множителя, не зависящего от координаты,

$$N(x) = \phi^{1/2}(x)\,\Gamma\,(1-\beta\hbar\lambda^+(x)/2\pi)\,\Gamma\,(1-\beta\hbar\lambda^-(x)/2\pi)\cdot\exp\{-\beta[U(x)-$$

$$(1-\phi(x))(U'(x))^2/2U''(x)]\}, \tag{3}$$

где

$$\phi(x) \equiv [m^{-1}U''(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\omega_n^2+\gamma\,|\omega_n|+m^{-1}U''(x))^{-1}]^{-1}, \tag{4}$$

λ^+ и λ^- – корни уравнения [1)]

$$\lambda^2+\gamma\lambda+m^{-1}U''(x)=0\,. \tag{5}$$

Выражение (3) применимо в тех областях x, где $U''(x)$ превышает некоторое (отрицательное) граничное значение $U''_{\text{гр}}$, отвечающее самому правому полюсу ϕ как функции U'' При подходе к области, где $U'' \leqslant U''_{\text{гр}}$, $N(x)$ определяется траекториями, все более удаляющимися от x, так что в конце концов квадратичное приближение становится неприменимым. При $\gamma = 0$ имеем

$$\phi(x) = [\beta\hbar(U''(x)/m)^{1/2}/2]^{-1}\,\mathrm{th}\,(\beta\hbar(U''(x)/m)^{1/2}/2) \text{ и } U''_{\text{гр}} = -m(\pi/\beta\hbar)^2$$

Рассмотрим теперь задачу о выходе броуновских частиц из одномерной потенциальной ямы через барьер. Полагая, что глубина ямы $U_0 \gg T$, воспользуемся квазистационарным приближением, т.е. будем считать распределение частиц в яме равновесным, а поток через барьер – установившимся. Классическая задача в такой постановке была решена Крамерсом [2], в квантовом случае для частиц, невзаимодействующих с термостатом, решение получено Аффлеком [3]. С экспоненциальной точностью квантовое туннелирование рассматривалось И.Лифшицем и Каганом [4] (при конечной температуре без диссипации), Калдейрой и Легетом [5] (с диссипацией при нулевой температуре), Ларкиным и Овчинниковым [6] (с диссипацией при конечной температуре).

В соответствии с малостью потока распределение частиц отличается от равновесного лишь в привершинной области, где барьер можно считать квадратичным $U(x) = -m\omega^2x^2/2$, ω – частота соответствующего перевернутого осциллятора. Запишем сначала отвечающую установившемуся потоку вигнеровскую функцию распределения частиц по координате x и импульсу p (см., например, [7]) при $\gamma = 0$. Равновесная функция распределения для квантового перевернутого осциллятора отличается от классической заменой температуры T на $(\hbar\omega/2)\,\mathrm{ctg}\,(\hbar\omega/2T)$. Установившемуся потоку через барьер (слева направо) отвечает функция распределения

$$f(p,x) = \text{const}\;\theta(p-m\omega x)\exp[-(2/\hbar\omega)\mathrm{tg}\,(\beta\hbar\omega/2)(p^2/2m-m\omega^2x^2/2)\,. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что эта функция стационарна, переходит при $x \to -\infty$ в равновесную, а при $x \to +\infty$ плотность числа частиц $\int f(p,x)\,dp$ стремится к нулю.

Для нахождения $f(p,x)$ при $\gamma \neq 0$ перейдем к нормальным колебаниям системы частица + струна. При этом, помимо устойчивых мод осцилляторного типа, обнаруживается одна

1) Обратим внимание, что вязкость не влияет на равновесное распределение лишь в классическом пределе.

неустойчивая — перевернутый осциллятор с частотой λ^+, являющейся положительным корнем уравнения (5) в точке $x = 0$. Очевидно, что при установившемся потоке функция распределения по координате и импульсу каждой из устойчивых мод будет равновесной, а для неустойчивой моды будет иметь вид (6) с λ^+ вместо ω. Находя посредством интегрирования по координатам и импульсам всех мод функцию распределения частицы и вычисляя поток через барьер $J = m^{-1} \int pf(p, x)\, dp$, найдем

$$J = \lambda^+ (2\pi\beta m\omega^2 \phi(0))^{-1/2} N(0), \qquad (7)$$

где $N(0)$ — равновесная плотность частиц на вершине барьера. Соотношение (7) отличается от классического лишь множителем $\phi^{-1/2}(0)$.

Обычно представляет интерес время жизни частицы в яме, т.е. отношение числа частиц в яме (в области $x < 0$) к потоку (7). При $T \ll U_0$ частицы сосредоточены вблизи дна ямы, где ее можно считать осциллятором с частотой Ω. Вычисляя в этом приближении число частиц в яме согласно (3), найдем окончательно

$$\tau^{-1} = \frac{\lambda^+ \Omega\, \Gamma(1 - \beta\hbar\lambda^+/2\pi)\, \Gamma(1 - \beta\hbar\lambda^-/2\pi)}{2\pi\omega\Gamma(1 - \beta\hbar\Lambda^+/2\pi)\, \Gamma(1 - \beta\hbar\Lambda^-/2\pi)}\, e^{-\beta U_0}, \qquad (8)$$

где

$$\lambda^{\pm} = -\gamma/2 \pm (\gamma^2/4 + \omega^2)^{1/2}, \quad \Lambda^{\pm} = -\gamma/2 \pm (\gamma^2/4 - \Omega^2)^{1/2}.$$

Поскольку выражение (8) не содержит $\phi(0)$, при понижении температуры особенность в τ^{-1} возникает только в момент обращения $\Gamma(1 - \beta\hbar\lambda^+/2\pi)$ в бесконечность, так что область применимости (8) $T > T_c = \hbar\lambda^+/2\pi$ шире, чем выражений (3) и (7). При температурах, близких к T_c и ниже, для вычисления потока необходимо учитывать отклонение формы барьера от параболической (см. также [3,4,6]).

При высоких температурах полученное для τ^{-1} выражение переходит в крамерсовское [2] (все Γ — функции равны единице), а в пределе $\gamma \ll \omega, \Omega$ (с учетом соотношения $\Gamma(1 + z)\Gamma(1 - z) = \pi z / \sin \pi z$) дает результат Аффлека [1)] [3]. Таким образом, полученный результат является прямым обобщением [2] и [3] на случай наличия и квантовых эффектов и вязкости.

Литература

1. *Schmid A.* J. of Low Temp. Phys., 1982, **49**, 609.
2. *Kramers H.A.* Physica 1940, **7**, 284.
3. *Affleck I.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 388.
4. *Лифшиц И.М., Каган Ю.* ЖЭТФ, 1972, **62**, 385.
5. *Caldeira A.O., Leggett A.J.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 211.
6. *Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **37**, 322.
7. *Татарский В.И.* УФН, 1983, **139**, 587.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау Академии наук СССР
Институт физики твердого тела
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 июня 1983 г.

---

1) Строгости ради отметим, что при слишком малой вязкости, когда $\gamma/\Omega \lesssim T/U_0$, квазистационарное приближение неприменимо [2].