Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 5, стр. 262 – 265 *10 сентября 1983 г.*

СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ В МОДЕЛЯХ КАЛУЗЫ – КЛЕЙНА И ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

Н.А.Воронов, Я.И.Коган

Рассмотрен механизм спонтанной компактификации в моделях Калузы – Клейна за счет квантового вакуумного среднего тензора энергии-импульса полей материи. Показано, что пространство $M^4 \times S^d$ является решением эффективных уравнений Эйнштейна.

Модели типа Калузы – Клейна [1] широко обсуждаются в последнее время в связи с объединением гравитации и калибровочных полей [2], а также с построением расширенных моделей супергравитации [3]. При этом необходимо компактифицировать дополнительные d измерений исходного $4 + d$-мерного пространства, так чтобы основное состояние, являющееся прямым произведением некомпактного четырехмерного пространства-времени и компактного d-мерного внутреннего пространства, было решением соответствующих уравнений Эйнштейна. В известных до сих пор механизмах компактификации [4] использовались нетривиальные классические решения уравнений Эйнштейна с дополнительными полями материи.

В настоящей работе мы хотели бы предложить другой возможный механизм компактификации, в котором тензор энергии-импульса в правой части уравнений Эйнштейна возникает не за счет классических решений, а в результате учета однопетлевых поправок, связанных с компактностью d-мерного подпространства. Это есть не что иное, как известный эффект Казимира [5]. В случае компактификации $M^4 \times S^1$ эффект Казимира рассматривался в работе [6] в связи с вопросами устойчивости вакуума.

Уравнения Эйнштейна в $4 + d$-мерном пространстве имеют вид

$$R^{(d)}_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R^{(d)} = \kappa (T_{AB} + g_{AB} \Lambda), \tag{1}$$

κ – $d + 4$-мерная гравитационная постоянная, которая связана с ньютоновской κ_N соотношением $\kappa = \kappa_N V(S^d)$, $V(S^d)$ – объем S^d, $A, B = 0, 1, \ldots, 4 + d - 1$, T_{AB} – вакуумное среднее тензора энергии-импульса, а значение Λ-члена будет определяться из условия обращения в ноль кривизны четырехмерного пространства M^4. Если мы хотим, чтобы решение (1) было пространством $M^4 \times S^d$, то

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu} & \\ \hline & g_{ab}(\theta_i) \end{array}\right); \qquad R_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{R}{d} g_{ab} \end{array}\right), \tag{2}$$

где R – скалярная кривизна S^d и $R = d(d - 1)/r^2$, r – радиус сферы S^d, θ_i – координаты на сфере.

Подставляя (2) в левую часть (1), получаем:

$$\kappa\,(T_{AB} + g_{AB}\,\Lambda) = \left(\begin{array}{c|c} -\dfrac{d(d-1)}{2r^2}\,\eta_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & -\dfrac{(d-1)(d-2)}{2r^2}\,g_{ab} \end{array}\right). \quad (3)$$

Для того, чтобы (3) имело решение, необходимо $<0\,|\,T_{\mu\nu}\,|\,0> = T_1\eta_{\mu\nu}$, $T_{a\mu} = 0$, $<0|T_{ab}|0> = T_2 g_{ab}$, что естественно должно выполняться для вакуумного среднего тензора энергии-импульса, учитывая симметрии пространств M^4 и S^d. Из (3) следует

$$\kappa\,(T_1 + \Lambda) = -\frac{d(d-1)}{2r^2}\,; \quad \kappa\,(T_2 + \Lambda) = -\frac{(d-1)(d-2)}{2\,r^2}\,. \quad (4)$$

Для конформно инвариантной связи материи с гравитацией возникает соотношение $4\,T_1 + dT_2 = 0$, связанное с бесследовостью T_{AB}. Это утверждение справедливо, если нет аномалии[1)] в T_A^A [7]. Вообще говоря, $g^{AB}(x) < 0|\,T_{AB}\,(x)\,|\,0> = A(x)$, где $A(x)$ выражается через R^2_{ABCD} и R^2_{AB}. Важно отметить, что для максимально симметричных пространств, в том числе и для S^d, эти величины на самом деле не зависят от x, поэтому $<0\,|\,T_B^B\,|\,0> = A$ является константой и определяется только радиусом сферы r и видом полей материи. Далее для простоты будем полагать $A = 0$, хотя все полученные результаты легко обобщаются и на $A \neq 0$ и будут рассмотрены в подробной статье.

Поскольку $T_1 = T_{00}$ есть плотность энергии в $d + 4$ пространстве, то она определяется выражением:

$$T_1 = \frac{1}{2V(S^d)}\left[\sum_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,N_i\,\sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m_i^2}{r^2}}\,\right]_{\text{reg}} \quad (5)$$

m_i^2 – собственные значения оператора соответствующего уравнения движения поля материи, ограниченного на компактном подпространстве S^d, а N_i – кратность состояний с данным m_i. В работе [6] использовалось иное представление для T_1,

$$T_1 = -\frac{i}{2V(S^d)}\left[\sum_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,N_i \ln\left(k^2 + \frac{m_i^2}{r^2}\right)\right]_{\text{reg}}, \quad k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2\,.$$

Можно легко показать, что эти представления приводят к одинаковому ответу для регуляризованного $<0\,|\,T_{AB}\,|\,0>$. Известно [8], что вычисление эффекта Казимира не зависит от выбора способа регуляризации (5) и приводит к выражению вида $T_1 = C/r^{4+d}$, причем константа C однозначно вычисляется и зависит от конкретного выбора полей материи. Тогда из (4) можно получить выражения для величины Λ-члена, обеспечивающего необходимую компактификацию $M^4 \times S^d$ и радиуса компактификации r_0:

$$r_0^{2+d} = -\,\kappa\,C\,\frac{(d+4)}{d(d-1)}\,; \qquad \Lambda = -\,\frac{d\,(d-1)(d+2)}{2r_0^2\,(d+4)}\,. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для наших целей необходимо, чтобы $C < 0$.

Мы рассматривали до сих пор тензор энергии-импульса полей материи. В работе [6] вычислялся эффективный потенциал, т. е. компонента T_{00}, обусловленная квантовыми флуктуациями гравитационного поля над заданной фоновой метрикой. Возможно, что и в этом слу-

---

[1)]Мы благодарны В.Н.Грибову и М.А.Шифману за полезное и стимулирующее обсуждение данного вопроса.

чае возникает тензорная структура типа (3), что означало бы чисто динамическую компактификацию пространства в отсутствии дополнительных полей материи. Законность этого предположения требует однако более тщательного рассмотрения (R^2 – контрчлены в одной петле).

Описанный механизм компактификации не работает для модели $M^4 \times S^1$ из-за нулевой кривизны M^4 и S^1. Первая нетривиальная размерность есть $(4 + 2)$.

Остановимся кратко[2)] на вычислении эффекта Казимира для модели компактификации $M^4 \times S^2$, в которой полями материи являются безмассовые скалярное и спинорное поля. Бозонный спектр в этом случае хорошо известен:

$$m_i^2 = i(i+1); \qquad N_i = 2i+1, \qquad i = 0, 1, \ldots , \tag{7}$$

где m_i и N_i – те же, что и в (5).

Задача о вычислении фермионного спектра менее тривиальна, что связано со спин-гравитационным взаимодействием. Найденный нами спектр имеет три ветви:

$$\begin{aligned}
&m_f^2 = \left(f+\frac{1}{2}\right)^2; && N_f = 2f, && f = 2, 3, \ldots\\
&m_f^2 = f^2; && N_f = 2, && f = 1, 2, \ldots\\
&m_f^2 = (2f)^2; && N_f = 2, && f = 1, 2, \ldots\\
&m_f^2 = 0; && N_f = 1 .
\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что в (7) и (8) имеется по одной бозонной и фермионной нулевой моде, наличие которых означает, что при спонтанной компактификации суперсимметричной теории суперсимметрия сохраняется только на нулевых модах и нарушается на массивных состояниях. Эта остаточная суперсимметрия не зависит от радиуса сферы r, что согласуется с общепринятой редукционной техникой в супергравитации [3, 4].

Зная (7) и (8) и используя стандартные методы регуляризации [8], можно вычислить (5) для данной конкретной модели. При этом необходимо учесть, что вклад фермионов в энергию вакуума входит с отрицательным знаком. Окончательно

$$C_b = -1{,}1 \cdot 10^{-4}; \qquad C_f = 8{,}6 \cdot 10^{-4}. \tag{9}$$

Мы искренне благодарны М.Б.Волошину, Л.Б.Окуню, К.А.Тер-Мартиросяну и М.А.Шифману, и особенно И.Ю.Кобзареву, за многочисленные полезные обсуждения.

Когда работа была отправлена в печать, мы узнали о препринте [9], где рассматривались аналогичные вопросы. Мы благодарны Д.Гроссу и В.И.Захарову, обративших наше внимание на эту работу.

Литература

1. *Kaluza Th.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1921, **K1**, 966; *Klein O.* Z. Phys., 1926, **37**, 895.
2. *De Witt B.* In "Relativity, Groups and Topology", New York, London, 1964; *Cho Y.M., Freund P.G.O.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 1711.
3. *Cremmer E., Julia B., Scherk J.* Phys. Lett., 1978, **76B**, 409; *van Nieuwenhuizen P.* Phys. Reports, 1981, **68**, 189.
4. *Cremmer E., Scherk J.* Nucl. Phys., 1976, **B108**, 409; ibid., 1977, **B118**, 61; *Luciani J.F.* Nucl. Phys., 1978, **B135**, 111; *Freund P.G.O., Rubin M.* Phys. Lett., 1980, **97B**, 233; *Волков Д.В., Ткач В.И.* ТМФ, 1982, **51**, 171; *van Nieuwenhuizen P.* Preprint TH. 3497-CERN, 1983.
5. *Casimir H.B.G.* Proc. Kon. Nederl. Acad. Wet, 1948, **51**, 793.

---

2) Подробные вычисления будут опубликованы в другом месте.

6. *Appelquist T., Chodos A.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 141; Yale preprint YTP 83-05, 1983.

7. *Fujikawa K.* Phys. Rev. Lett., 1980, **44**, 1733; *Duff M.J.* Preprint TH. 3232-CERN, 1982.

8. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, М.: Атомиздат, 1980. (и ссылки на предыдущие работы).

9. *Candelas P., Weinberg S.* Texas preprint UTTG-6-83.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
14 июля 1983 г.