Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 6, стр. 299 – 302 *25 сентября 1983 г.*

НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНЫХ СПЕКТРОВ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОМОЩЬЮ СУПЕРСИММЕТРИИ

Л.Э.Генденштейн

Обнаружен новый вид скрытой симметрии, позволяющий находить полные спектры широкого класса задач, включая все известные точно решенные задачи квантовой механики, с помощью элементарных вычислений. Показано, как эта симметрия объясняет безотражательный характер потенциалов.

1. Суперсимметрия [1] вызывает растущий интерес среди физиков, и области ее применения еще далеко не исчерпаны. В настоящей работе исследуется энергетический спектр суперсимметричной квантовой механики, являющейся важной моделью для изучения структуры суперсимметричных теорий [2]. Мы находим условия, при которых задача о нахождении полного спектра имеет точное и очень простое решение.

Этот результат может представлять двойной интерес: во-первых, он подсказывает новые черты точно решаемых моделей (предложенное здесь точное решение задачи о спектре связано со своеобразной скрытой симметрией гамильтониана), а, во-вторых, он позволяет легко находить полные спектры широкого класса одномерных или сводящихся к одномерным задач обычной квантовой механики, в число которых входят, в частности, все известные [3] точно решенные задачи о спектре. Все такие задачи обладают скрытой симметрией, и благодаря этому вычисление спектров носит элементарный характер: практически сразу можно получить ответ.

Предлагаемый подход дает также объяснение безотражательному характеру потенциалов вида $U(x) = -n(n+1)/2\,\mathrm{ch}^2 x$, играющих важную роль в теории солитонов: такие потенциалы связаны преобразованиями упомянутой симметрии с потенциалом $U(x) \equiv 0$.

2. Гамильтониан суперсимметричной квантовой механики имеет вид [2]:

$$H = (p^2 + W^2(x) + \sigma_3 W'(x))/2$$

(σ_i – матрицы Паули) и действует на двухкомпонентные волновые функции. Генераторы суперсимметрии $Q_1 = (\sigma_1 p + \sigma_2 W)/2$; $Q_2 = (\sigma_2 p - \sigma_1 W)/2$ удовлетворяют алгебре $Q_1^2 = Q_2^2 = H/2$; $\{Q_1, Q_2\} = 0$; $[H, Q_1] = [H, Q_2] = 0$, что обеспечивает неотрицательность спектра H и вырождение уровней. Невырожденным может быть только наинизший уровень, энергия которого в этом случае равна нулю [1)].

---

1) Наличие уровня с нулевой энергией свидетельствует о том, что суперсимметрия спонтанно не нарушена. Это имеет место, если одна из функций $\psi = \exp(\pm \int^x W(x')dx')$ является нормируемой [2].

Отсюда следует, что два обычных одномерных гамильтониана $H_\pm$

$$H_\pm = p^2/2 + (W^2(x) \pm W'(x)) \equiv p^2/2 + U_\pm(x), \qquad (2)$$

имеют *одинаковый* спектр при *произвольной* функции $W(x)$. Исключение может составлять только нижний уровень одного из $H_\pm$, и его энергия в этом случае *точно* равна нулю. Именно эти два свойства суперсимметричных теорий: вырождение спектра и равенство нулю энергии основного состояния и будут использованы ниже для нахождения точного спектра.

3. Пусть нулевым уровнем обладает H_- (т.е. нормируема $\psi_0 = \exp(-\int^x W(x')dx')$).

Поставим вопрос: как связаны потенциалы $U_\pm = (W^2 \pm W')/2$? Если они отличаются только значениями входящих в них *параметров* [2] (включая аддитивную константу), то полный спектр гамильтонианов $H_\pm$, а, следовательно, и суперсимметричного гамильтониана H, может быть легко найден. Действительно, пусть

$$U_+(a, x) = U_-(a_1, x) + R(a_1), \qquad (3)$$

где a — совокупность параметров, и $a_1 = f(a)$.

Построим серию гамильтонианов H_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_n = p^2/2 + U_-(a_n, x) + \sum_{k=1}^{n} R(a_k), \qquad (4)$$

где $a_n = f^{(n)}(a)$ (n — кратное применение f), и сравним спектры H_n и H_{n+1}. Пользуясь соотношением (3), получаем:

$$H_{n+1} = p^2/2 + U_+(a_n, x) + \sum_{k=1}^{n} R(a_k). \qquad (5)$$

Сравнивая формулы (4), (5) и учитывая изложенное в п.2, мы видим, что H_n и H_{n+1} имеют одинаковые спектры, за исключением нижнего уровня H_n, энергия которого, как следует из (4), равна $\sum_{k=1}^{n} R(a_k)$. Переходя от H_n к H_{n-1} и т.д., мы получим исходный гамильтониан $H_0 = H_- = p^2/2 + U_-(a, x)$, нижний уровень которого равен нулю, а *все* остальные уровни совпадают с нижними уровнями гамильтонианов $\mathcal{H}_n$. Таким образом, полный спектр H_- дается формулой $\widetilde{E}_n = \sum_{k=1}^{n} R(a_k)$. Следовательно, спектр гамильтониана с потенциалом $U(a, x) = U_-(a, x) + C(a)$ имеет вид

$$E_n = \widetilde{E}_n + C(a) = \sum_{k=1}^{n} R(a_k) + C(a). \qquad (6)$$

Формула (6) представляет основной результат.

4. Покажем применение изложенного подхода на интересном примере потенциала $U(a,x) = -a(a+1)/2\,\mathrm{ch}^2 x$, который, как известно, является безотражательным при целых a. В данном случае $W(x) = a\,\mathrm{th}\,x$. Имеем: $U_\pm(a, x) = -a(a \mp 1)/2\,\mathrm{ch}^2 x + a^2/2$. Отсюда $a_1 = f(a) = a - 1$; $a_n = a - n$; $C(a) = -a^2/2$; $R(a_k) = (a_{k-1}^2 - a_k^2)/2$, поэтому $\sum_{k=1}^{n} R(a_k) = (a^2 - a_n^2)/2$, и полный спектр, согласно (6), имеет вид

$$E_n = -a_n^2/2 = -(a-n)^2/2.$$

[2] Эти параметры являются аналогами связи и масс в теории поля.

Нахождение спектров во всех других случаях (см. следующий пункт) совершенно аналогично и носит такой же элементарный характер.

В рассмотренном примере при целых a потенциал $U(a, x)$ сводится последовательностью преобразований (3) к потенциалу $U(x) \equiv 0$, поскольку $a_n = a - n$. Это обеспечивает безотражательный характер таких потенциалов: собственные функции гамильтонианов H_n и H_{n+1} связаны действием операторов $Q_\pm \sim (d/dx \pm W(x))$, не переводящих друг в друга функции $\exp(\pm ikx)$, а для $U(x) \equiv 0$ отражение, очевидно, отсутствует.

5. Таким образом, если потенциалы $U_\pm$ удовлетворяют условию (3), т.е. функция $W(a,x)$ удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению

$$W^2(a, x) + W'(a, x) = W^2(a_1, x) - W'(a_1, x) + 2R(a_1), \tag{7}$$

то спектры гамильтонианов $H_\pm$, а вместе с ними и спектр суперсимметричной модели (1), могут быть найдены элементарным вычислением с помощью изложенного здесь подхода. Мы нашли следующие решения (7):

$$W = af_1 + b; \quad W = af_2 + b/f_2; \quad W = (a + b\sqrt{pf_3^2 + q})/f_3\,, \tag{8}$$

где функции f_1, f_2 и f_3 удовлетворяют дифференциальным уравнениям (с разделяющимися переменными) $f_1' = pf_1^2 + qf_1 + r$; $f_2' = pf_2^2 + q$; $f_3' = \sqrt{pf_3^2 + q}$ с произвольными постоянными p, q, r. Соответствующие потенциалы включают все потенциалы, для которых до сих пор удалось найти точные спектры [3)] (в [3] приведено всего восемь таких потенциалов), а также ряд других:

$$1)\ U(x) = \frac{a(a-1)}{2\,\mathrm{sh}^2 x} - \frac{b(b+1)}{2\mathrm{ch}^2 x}; \qquad 2)\ U(x) = \frac{a(a+1) + b^2}{2\,\mathrm{sh}^2 x} - \frac{b(2a+1)\,\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x};$$

$$3)\ U(x) = \frac{b^2 - a(a+1)}{2\,\mathrm{ch}^2 x} + \frac{b(2a+1)\,\mathrm{sh}\,x}{2\,\mathrm{ch}^2 x}; \quad 4)\ U(x) = \frac{a(a-1) + b^2}{2\sin^2 x} - \frac{b(2a-1)\cos x}{2\sin^2 x},$$

имеющих характерное качественное поведение. Их спектры

$$1)\ E_n = -(b - a - 2n)^2/2; \quad 2)\ E_n = -(a-n)^2/2; \quad 3)\ E_n = -(a-n)^2/2;$$

$$4)\ E_n = (a+n)^2/2$$

находятся аналогично примеру п.4.

Вопрос о существовании решений (7), отличных от (8), остается открытым. Возможно, выражаемая формулами (3), (7) „форминвариантность" потенциалов является также и необходимым условием того, чтобы задача о нахождении точного спектра в принципе имела решение.

Заметим, наконец, что энергию *основного* состояния можно вычислить для потенциала $U(x) = (W^2 - W')/2 + C$ с произвольной $W(x)$ лишь бы $\psi = \exp(-\int^x W(x')\,dx')$ была нормируемой. Например, для $U(x) = (a^3x^6 - 3ax^2)/2$ получаем $E_0 = \sqrt{a}$ (считая от дна потенциальной ямы).

Представляется интересной возможность обобщения предложенного подхода на многомерные случаи и теорию поля.

Автор благодарен Д.В.Волкову, В.Э.Кацнельсону, И.В.Криве и А.И.Пашневу за обсуждения.

[3)] Не считая кусочно-постоянных потенциалов.

Литература

1. *Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.* Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, 452; *Волков Д.В., Акулов В.П.* Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, 621; *Wess J., Zumino B.* Nucl. Phys., 1974, **B70**, 39.
2. *Witten E.* Nucl. Phys., 1981, **B185**, 513.
3. *Багров В.Г. и др.* Точные решения релятивистских волновых уравнений, 1982, Новосибирск, с. 64.

Харьковский
физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
10 июля 1983 г.