*Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 6, стр. 302 – 304* *25 сентября 1983 г.*

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОПЛАКЕТНОГО ДЕЙСТВИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В РЕШЕТОЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

*В.М.Емельянов, С.В.Петровский*

Проведен топологический анализ экстремумов одноплакетного действия, их связи с фазовыми переходами на пространственно-временной решетке. Обсуждены результаты численных расчетов топологической восприимчивости и предел $N \to \infty$.

Последние годы отмечены несомненным прогрессом в понимании структуры сильных взаимодействий элементарных частиц. Введение решеточной непертурбативной регуляризации позволило применить численные методы к вычислению физических величин, исходя непосредственно из лагранжиана КХД [1]. Однако, несмотря на значительную предсказательную силу, численные методы в решеточной калибровочной теории (РКТ) обладают очевидным недостатком: в конечном счете они дают для физической величины число, и далеко не всегда удается проследить, с какой динамикой пространственно-временной решетки, с какими флуктуациями калибровочной группы связана рассматриваемая величина. На наш взгляд, гораздо больше информации о РКТ можно получить при сочетании численных и топологических методов.

Будем рассматривать на пространственно-временной решетке действие вида

$$S = \sum_p \sum_r \left( -\operatorname{Re} \beta_r \chi_r (U_p) \right), \tag{1}$$

суммирование проводится по плакетам решетки, $\beta_r$ – вещественные числа, $\chi_r(U_p)$ – шпур матрицы $U_p$ в представлении с индексом $r$. Отметим, что в численных расчетах, например, с группой $SU(2)$ обычно используются действия Вильсона ($\beta_{r=1/2} \neq 0$, $\beta_{r>1/2} = 0$), двухзарядное ($\beta_{r=1/2} \neq 0$, $\beta_{r=1} \neq 0$, $\beta_{r>1} = 0$) и Мантона (с подавленным вкладом больших $r$). Конечно, действие (1) гораздо труднее исследовать численными методами, но именно оно несет информацию о топологических свойствах калибровочных полей на решетке. С действием (1) РКТ приобретает богатую фазовую структуру, причем некоторые фазы РКТ могут присутствовать в непрерывной теории. В работе (2) на основе анализа двухзарядного действия показано, что существование невырожденного локального экстремума одноплакетного действия достаточно для появления фазового перехода в четырехмерной РКТ, при этом концевые точки фазового перехода первого рода лежат на линии, на которой экстремумы одноплакетного действия становятся нестабильными. Нам хотелось бы показать топологическое происхождение фазовых переходов в РКТ с одноплакетным действием $S_p(\{\beta_r\}, U_p) = \sum_r (-\operatorname{Re} \beta_r \chi_r(U_p))$.

Свойство $\chi_r(U_p) = \chi_r(g U_p g^{-1})$ для любого $g \epsilon G$ позволяет рассматривать функцию $S_p$ на однородных пространствах [3] (совокупности орбит и слоев) относительно внутрен -

них автоморфизмов группы. Однородные пространства группы могут иметь сложную топологическую структуру. Обратимся к случаю калибровочной группы $SU(2)$. Все однородные пространства группы $SU(2)$ можно получить групповым сопряжением замкнутых подгрупп. Однородные пространства образуют [4]:

а) трехмерные многообразия $SU(2) \approx S^3$; $SU(2)/C_n \approx L(n, 1)$; $SU(2)/\widetilde{D}_{2n} \equiv \widetilde{L}_{2n}$; $SU(2)/T \equiv M_1$; $SU(2)/\widetilde{O} \equiv M_2$; $SU(2)/\widetilde{Y} \equiv M_3$; $n = 1, 2, \ldots$ . Здесь знак $\approx$ означает гомеоморфизм, $C_n$, $\widetilde{D}_{2n}$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{O}$, $\widetilde{Y}$ – дискретные подгруппы, $L(n, 1)$ – линзовое пространство, $M_3$ – пространство Пуанкаре;

б) двумерные многообразия $S^2$; $RP^2$ – двумерная вещественная проективная плоскость.

в) нульмерное многообразие, гомеоморфное точке.

Отметим, что фундаментальная группа однородных пространств с дискретной изотропной подгруппой изоморфна самой изотропной подгруппе, поэтому однородные пространства $L(n, 1)$, $\widetilde{L}_{2n}$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ топологически неэквивалентны.

Рассмотрим орбитную структуру неприводимых представлений группы $SU(2)$. Нетрудно показать, что в случае полуцелых значений $r = 1/2, 3/2, \ldots$ имеются орбиты $S^3$ и $L(p, 1)$, $p = 3, 5, \ldots, 2r\ (r \neq 1/2)$, для целых значений $r = 1, 2, 3 \ldots$ орбитами являются $RP^2$, если $r$ – четное и $S^2$, если $r$ – нечетное. Орбиты $\widetilde{L}_{2n}$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ появляются в высших ($r \gtrsim 10$) представлениях группы.

Нас интересует поведение функции $S_p(\{\beta_r\}, U_p)$ на однородных пространствах и ее критические точки.

Пусть действие $S_p(\{\beta_r\}, U_p)$ относится к классу полиномиальных функций на группе $G$, тогда оно является функцией $S_p(\{\gamma_r\}, k)$ от полиномиальных инвариантов $k = \{k_\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, q$ (для группы $SU(2)$ $q = 1$, для $SU(3)$ $q = 2$) [5]. В этом случае орбиты являются точками в пространстве полиномиальных инвариантов, и через полиномиальные инварианты можно записать уравнения $F_l(k) = 0$, $l = 1, \ldots, s$, определяющие слой [6]. Введем множители Лагранжа $\lambda_l$. Экстремум на слое $\Omega$ будет стабильным (по отношению к малым изменениям $\{\gamma_r\}$, если для всех точек в окрестности экстремального набора $\{\bar{\gamma}_r\}$) функция $S_p(\{\gamma_r\}, k)$ имеет экстремум, непрерывно и дифференцируемо изменяющийся на $\Omega$.

Если определить $\eta = (k, \lambda) = (k_1, \ldots, k_q; \lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \{\eta_A\}_{1 \leqslant A \leqslant q+s}$, $\widetilde{S}_p(\{\gamma_r\}, \eta) = \left(S_p(\{\gamma_r\}, k) + \sum_{l=1}^{s} \lambda_l F_l(k)\right)\Big|_{(k,\lambda)=\eta}$, то уравнение $\partial_A \widetilde{S}_p(\{\gamma_r\}, \eta) = 0$ (2), $1 \leqslant A, B \leqslant q + s$, совместно с условием $\det|\partial_A \partial_B \widetilde{S}_p(\{\gamma_r\}, \eta)|_{\eta=\bar{\eta}} = 0$ определяет стабильные экстремальные точки $\{\bar{k}_\alpha\}$ функции $S_p(\{\gamma_r\}, k)$ на $\Omega$, находящиеся во взаимнооднозначном соответствии с решениями $(\{\bar{\gamma}_r\}, \bar{\eta})$ уравнения (2).

Нетрудно сформулировать и условия неустойчивости экстремума $S_p(\{\gamma_r\}, k)$ (в случае двухзарядного действия они дают линии неустойчивости [2]). Эти неустойчивости могут быть двух типов: а) неустойчивости по отношению к малым изменениям $\{\gamma_r\}$ в пределах одного слоя, б) неустойчивости по отношению к переходу экстремума из одного слоя в другой. Последние особенно интересны для РКТ, так как происходит изменение топологии многообразия, на котором определена функция $S_p$. Поскольку на однородных пространствах можно ввести меру и понятие объема, поиск таких переходов возможен с использованием численных методов Монте-Карло.

В заключение отметим, что недавние расчеты топологической восприимчивости $\chi_t$ в РКТ [7] дали заниженное на два порядка значение по сравнению с тем, которое необходимо для разрешения $U_A(1)$ – проблемы КХД. Причина расхождений, на наш взгляд, двоякого рода: 1) в бедной топологии многообразия, на котором определено действие (обычно на подгруппе икосаэдра группы $SU(2)$), 2) в выборе вида самого действия с подавленным вкладом высших представлений калибровочной группы. По-видимому, вычисленная величина $\chi_t$ в РКТ не имеет отношения к континууму теории с решеточным действием (1), чувствительным к топологии орбит и слоев.

Для групп $U(N)$ при $N \to \infty$ ($SU(N)$ и $U(N)$ в пределе $N \to \infty$ не отличимы)наибольшим объемом обладают орбиты, построенные на максимальном торе $U^N(1)$ (у них собственные значения матриц $U \in U(N)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_N$). При $\lambda_i = \lambda_j$ сингулярные орбиты имеют изотропную подгруппу $U(2) \otimes U^{N-2}(1)$. Влияние конечных $N$ (и отклонение от квазиклассического описания $N \to \infty$) связано с ростом объема орбит, построенных на дискретных подгруппах.

Авторы благодарны А.С.Шварцу и В.Л.Голо за обсуждение топологии однородных пространств.

### Литература

1. *Макеенко Ю.М.* Препринт ИТЭФ, 124, 125, 126, М., 1982.
2. *Bachas C.P., Dashen R.E.* Nucl. Phys. 1982, **B210 [F56]**, 583.
3. *Michel L.* Rev. Mod. Phys., 1980, **52**, 617.
4. *Mickelsson J., Niederle J.* Com. Math. Phys., 1970, **16**, 191.
5. *Вейль Г.* "Классические группы, их инварианты и представления", М.: ГИИЛ, 1947.
6. *Luna D.* Ann. Inst. Fouvier, 1976, **26**, 33.
7. *Di Vecchia P. et al.* Nucl. Phys., 1981, **B192**, 392; *Махалдиани Н.В., Мюллер-Пройскер М.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **37**, 440.

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
25 июля 1983г.