Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 7, стр. 358 – 360 *10 октября 1983 г.*

КИРАЛЬНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ПО КВАРКАМ

Д.И.Дьяконов, М.И.Эйдес

Показано, что низкоэнергетический эффективный лагранжиан для нонета псевдоскалярных мезонов (включающий взаимодействие Весса – Зумино – Виттена) можно получить непосредственно из фундаментального лагранжиана квантовой хромодинамики (КХД).

Динамическое нарушение киральной симметрии в КХД приводит к тому, что фаза γ_5-преобразования полей кварков описывает голдстоуновские частицы – псевдоскалярные мезоны π^a ($a = 1, \ldots, 9$). Получим для них эффективное низкоэнергетическое действие $W[\pi]$, рассматривая π^a как элементарное внешнее поле, взаимодействующее с кварками:

$$\exp - W[\pi] \equiv \frac{\int DG_\mu D\psi D\psi^+ \exp\{-S[G_\mu] + \int d^4x \psi^+ e^{i\Pi\gamma_5}\gamma_\mu(i\partial_\mu + G_\mu)e^{i\Pi\gamma_5}\psi\}}{\int DG_\mu D\psi D\psi^+ \exp\{-S[G_\mu] + \int d^4x\, \psi^+\gamma_\mu(i\partial_\mu + G_\mu)\psi\}} \cdot \quad (1)$$

Здесь G_μ – глюонное поле, $S[G_\mu] = \mathrm{Tr}\int d^4x\, G^2_{\mu\nu}/2g^2$ – действие для глюонов, ψ – поля кварков u, d, s, $\Pi = \pi^a t^a/F$ – эрмитова 3×3 матрица псевдоскалярного нонета, $\mathrm{Tr}\, t^a t^b = \delta^{ab}/2$, $t^9 = I/\sqrt{6}$, F – размерная константа (см.ниже). Мы используем евклидову формулировку КХД.

Отметим сразу, что $W[\pi] \neq 0$ только из-за аксиальной аномалии. Действительно, можно сделать замену переменных $\psi' = \exp(i\Pi\gamma_5)\psi$ и, казалось бы, устранить поле Π, однако из-за аномалии соответствующий якобиан перехода нетривиален [1], что и обеспечивает $W[\pi] \neq 0$. Именно это обстоятельство позволяет вычислить интеграл по полям кварков. Перепишем фермионную часть действия, вводя левые и правые калибровочные поля:

$$\mathcal{L}_\psi = \psi^+\gamma_\mu\left[\frac{1+\gamma_5}{2}(i\partial_\mu + L_\mu) + \frac{1-\gamma_5}{2}(i\partial_\mu + R_\mu)\right]\psi \equiv \psi^+ i\hat{\nabla}\psi, \quad (2)$$

$$L_\mu = G_\mu \otimes I + I \otimes iU^+\partial_\mu U, \quad R_\mu = G_\mu \otimes I + I \otimes iU\partial_\mu U^+, \quad U = \exp i\Pi. \quad (3)$$

Первый сомножитель в прямых произведениях относится к пространству цветов, а второй – к пространству ароматов.

Рассмотрим фермионный детерминант

$$Y[\pi, G_\mu] \equiv \ln\det i\hat{\nabla} = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t}\exp(t\hat{\nabla}^2), \quad (4)$$

где мы воспользовались регуляризацией по собственному времени, сохраняющей векторный ток. Найдем аксиальную аномалию $\mathcal{A}^a(\pi, G_\mu)$, подействовав на Y генератором бесконечно-малого аксиального преобразования $T^a_A = T^a_L - T^a_R$, где $T^a_L(x) = -D^{ab}_\mu L\,\delta/\delta L^b_\mu(x)$, $T^a_R(x) = -D^{ab}_\mu(R)\delta/\delta R^b_\mu(x)$ – генераторы калибровочных преобразований левых и правых полей. Воспользуемся общей формулой

$$T^a_A\,\mathrm{Sp} f(\hat{\nabla}) = -2i\,\mathrm{Sp}\, t^a\gamma_5\hat{\nabla}\frac{\partial}{\partial\hat{\nabla}}f(\hat{\nabla})\cdot$$

Мы имеем:

$$\mathcal{A}^a(\pi, G_\mu) \equiv T^a_A Y[\pi, G_\mu] = 2i \,\mathrm{Sp}\, t^a \gamma_5 \int_\epsilon^\infty dt\, \hat{\nabla}^2 \exp t\hat{\nabla}^2 = \tag{5}$$

$$= -2i \,\mathrm{Sp}\, t^a \gamma_5 \exp \epsilon \hat{\nabla}^2 = -2i \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\; t^a \gamma_5 \exp [\epsilon (\hat{\nabla} + i\hat{p})^2].$$

Как и следовало ожидать, аномалия определяется нижним пределом интегрирования по собственному времени. Вычисляя последнее выражение с учетом (3), мы получаем

$$\mathcal{A}^a(\pi, G_\mu) = -\frac{1}{2\pi^2 \epsilon} \mathrm{Tr}\, t^a D_\alpha(V) A_\alpha + \delta^{a9} \frac{i\sqrt{6}}{16\pi^2} \mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu} \widetilde{G}_{\mu\nu} -$$

$$- \frac{2i}{3\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\; \mathrm{Tr}\, t^a A_\alpha A_\beta A_\gamma A_\delta + \mathcal{A}' + O(\epsilon). \tag{6}$$

Здесь $V_\alpha = (L_\alpha + R_\alpha)/2$, $A_\alpha = (L_\alpha - R_\alpha)/2 = (i/2) I \otimes (U^+ \partial_\alpha U - U \partial_\alpha U^+)$, $D_\alpha(V) = \partial_\alpha - i[V_\alpha, ...]$, $G_{\mu\nu}$ – глюонная напряженность, $\widetilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}/2$. Через $\mathcal{A}'$ мы обозначили выражение, конечное по обрезанию ϵ, которое не содержит антисимметричного тензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Оно приводит к членам в эффективном лагранжиане высшего порядка по производным, и не будет здесь рассматриваться, так же как и следующие члены $O(\epsilon)$.

Выражение (6) может быть получено и при других регуляризациях аномалии, сохраняющих векторный ток [2]. Подчеркнем, что первый (квадратично-расходящийся) член в (6) — неизбежная расплата за такую регуляризацию.

Следует, однако, иметь в виду, что мы ввели внешнее поле как элементарное. Поэтому ультрафиолетовое обрезание ϵ имеет объективный смысл того размера, на котором проявляется неточечность псевдоскалярных мезонов.

Подставляя первый член в (6) в уравнение (5), мы восстанавливаем соответствующий член в $Y[\pi, G_\mu]$:

$$\frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, A^2_\alpha = \frac{N_c}{16\pi^2 \epsilon} \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, \partial_\mu U^{-2} \partial_\mu U^2. \tag{7}$$

Это есть стандартный киральный лагранжиан псевдоскалярных мезонов. Разлагая $U \cong 1 + i\pi^a t^a/F$ и нормируясь по кинетической энергии $(\partial_\mu \pi^a)^2/2$, мы получаем $\sqrt{\epsilon} = \sqrt{N_c}/2\pi F$, где константа $F = F_\pi \cong 95$ МэВ находится из сравнения следующих членов разложения по π^a со стандартным лагранжианом. Отметим, что $F_\pi \backsim \sqrt{N_c}$, поэтому „размер пиона" $\sqrt{\epsilon}$ не зависит от числа цветов N_c, что разумно.

Интегрирование второго члена в (6) приводит к члену в $Y[\pi, G_\mu]$, нарушающему U_1-симметрию [3]:

$$-\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \ln \det U^2 \cdot \mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu} \widetilde{G}_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Если в чистой глюодинамике (без легких кварков) существует ненулевой коррелятор топологического заряда $\int d^4x < \mathrm{Tr}\, G\widetilde{G}(x)\, \mathrm{Tr}\, G\widetilde{G}(0) > \equiv \lambda^4 (16\pi^2)^2$, то при подстановке (8) в (1) возникает слагаемое в $W[\pi]$, дающее массу девятому (синглетному) мезону $\pi^9 = \eta'$ [3, 4]:

$$- \frac{\lambda^4}{2} \int d^4x\, (\ln \det\, U^2)^2 = \frac{1}{2} \int d^4x\, m^2_{\eta'} \eta'^2, \quad m^2_{\eta'} = \frac{6\lambda^4}{F^2_\pi} . \tag{9}$$

Наконец, третий член в (6) приводит к взаимодействию Весса – Зумино – Виттена [5] (подробный вывод будет опубликован):

$$- \frac{iN_c}{240\pi^2} \int d^5x\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\, \mathrm{Tr}\, (U^{-2}\, \partial_\alpha U^2\,)(_\beta)(_\gamma)(_\delta)(_\epsilon). \tag{10}$$

По существу, это есть интеграл от полной 5-дивергенции, сводящийся к обычному 4-мерному действию. В самом деле, этот член можно переписать в виде

$$\frac{N_c}{24\pi^2} \int d^4x \int_0^1 d\tau\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.\mathrm{Tr}\, \Pi\, (e^{-2i\tau\Pi}\, \partial_\alpha e^{2i\tau\Pi})(_\beta)(_\gamma)(_\delta) = \tag{10'}$$

$$= \frac{2N_c}{15\pi^2} \int d^4x\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \mathrm{Tr}\, \Pi\, \partial_\alpha \Pi\, \partial_\beta \Pi\, \partial_\gamma \Pi\, \partial_\delta \Pi + O(\Pi^7).$$

Искомое эффективное действие $W[\pi]$ дается суммой (7), (9) и (10).

Таким образом, мы показали, что низкоэнергетический лагранжиан нонета псевдоскалярных мезонов может быть получен непосредственно из функционального интеграла по кваркам, причем константа F_π имеет смысл ультрафиолетового обрезания, связанного с неточечностью мезонов.

Мы благодарны Л.Н.Липатову и В.Ю.Петрову за интересное обсуждение.

Литература

1. *Fujikawa K.* Phys. Rev., 1980, **D21**, 2848.
2. *Bardeen W.A.* Phys. Rev., 1969, **184**, 1848; *Brown R.W. et al.* Phys. Rev., 1969, **186**, 1491; *Balachandran A.P. et al.*, Phys. Rev., 1982, **D25**, 2713; *Andrianov A., Bonora L.* Preprint CERN, 1983, TH-3539.
3. *Di Vecchia P., Veneziano G.* Nucl. Phys., 1980, **B171**, 253; *Дьяконов Д.И., Эйдес М.И.* Материалы XYII школы ЛИЯФ, стр.55, Л: 1982.
4. *Witten E.* Nucl. Phys., 1979, **B156**, 269; *Veneziano G.* Nucl. Phys., 1979, **B159**, 213; *Дьяконов Д.И., Эйдес М.И.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 434.
5. *Wess J., Zumino B.* Phys. Lett., 1971, **37B**, 95; *Witten E.* Princeton preprint, 1983.

Институт
ядерной физики
им. Б.П.Константинова

Поступила в редакцию
5 августа 1983 г.