Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.8, стр. 415 – 417 *25 октября 1983 г.*

О ГЛАБАЛЬНОЙ КАЛИБРОВКЕ В НЕАБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ

М.А.Соловьев

Показано, что топологический запрет на глобальную калибровку в неабелевой теории существует только для достаточно гладких полей. Соответствующая граница выделяется критерием Соболева. Показано также, что ниже этой границы обычные условия типа кулоновского даже локально не являются калибровками.

Цель данной статьи – показать, как зависит ситуация с калибровкой в неабелевой теории [1,2] от рассматриваемого пространства полей. Имеется своеобразная альтернатива: топологический запрет Зингера на глобальную калибровку справедлив только для достаточно гладких полей, но как только мы пересекаем границу, ниже которой он отпадает, обычно используемые условия (кулоновское, Лоренца, фоновое) перестают быть калибровками даже локально. Ясность в этом вопросе полезна при выходе за рамки теории возмущений. Например, при уточнении предложенной Грибовым области континуального интегрирования с помощью вариационного принципа [3,4] используется метрика, определяемая формой кинетической части лагранжиана. Соответствующее этой метрике пространство L^2 лежит ниже упомянутой границы, и группа калибровочных преобразований, да и сам вариационный принцип имеют здесь ряд особенностей. Как мы увидим, меняется топология этой группы. Кроме того, она перестает быть группой Ли, т.е. отброшенные в разложении бесконечно малого преобразования $e^w = 1 + w + \dots$ члены на самом деле имеют тот же порядок малости, что и w.

Общепринятой шкалой, позволяющей проследить за изменением топологии по мере увеличения запаса функций, служат соболевские пространства L^p_k [5]. Они состоят из полей, все производные которых вплоть до порядка k имеют интегрируемую p-ю степень. Чем меньше индексы p, k, тем шире пространство. Соответствующую группу калибровочных преобразований обозначим G^p_{k+1}. Их производные p интегрируемы до порядка $k+1$. Граница, о которой идет речь, выделяется неравенством

$$p(k+1) > n. \qquad (1)$$

Здесь n – размерность многообразия, на котором определено поле. Используют и более сильные ограничения, но именно (1) действительно существенно для неабелевой теории. Для пространств (1) кулоновское условие служит локальной калибровкой [6]. Покажем, что для них справедлива и теорема [2]. Достаточно рассмотреть простейший случай $SU(2)$-теории над сферой S^3. Поскольку $SU(2)$ гомеоморфна S^3 группа калибровочных преобразований G в этом случае состоит из отображений $S^3 \to S^3$. При условии (1) они непрерывны в силу теоремы Соболева [5], причем допускают непрерывную деформацию друг в друга лишь в том случае, если имеют одинаковую степень. Поэтому G распадается на счетное число компонент. Центр Z этой группы состоит из двух элементов: постоянных отображений $S^3 \to I$ и $S^3 \to -I$. Практически для любого поля подгруппа стабильности совпадает с Z. Иначе говоря, на полях общего положения, которые называют еще неприводимыми, факторгруппа G/Z действует свободно. Их множество связно, т.е. любые два таких поля можно соединить непрерывным путем, также состоящем из неприводимых полей. Это верно при любых p, k. Простая суть теоремы [2] состоит в следующем. Если бы глобальная калибровка существовала, множество неприводимых полей можно было бы непрерывно отобразить на G/Z, сопоставив каждому полю то преобразование, которое переводит его на поверхность калибровки (оно единственно в силу свободы действия). Но это невозможно, поскольку тогда и любые два элемента G/Z можно было бы соединить непрерывным путем (взяв образ пути в пространстве полей), а эта группа несвязна, как и G.

При $p(k+1)<n$ ситуация меняется. Нетрудно увидеть на том же примере, что в топологии такого пространства любое непрерывное калибровочное преобразование можно продеформировать в тождественное, т.е. все компоненты G слипаются в одну. Не ограничивая общности, можно считать, что $g: S^3 \to SU(2)$ переводит северный полюс N в единичную матрицу. Пусть $0 < t \leqslant 1/2$. Представим себе, что окрестность $0 \leqslant \theta < \pi t$ точки N растягивается по сфере в $(1-t)/t$ раз. Соответственно, дополнительная часть сферы сжимается в такое же число раз. Посмотрим, что происходит с отображением g при такой деформации в пределе $t \to 0$. В малой окрестности $\pi(1-t) \leqslant \theta \leqslant \pi$ южного полюса имеем функцию, сжатую в $(1-t)/t \sim 1/t$ раз, а в остальной части сферы функцию, полученную из малой окрестности N и потому близкую к I. Значит, $\int \mathrm{tr}\,(g_t - I)(g_t - I)^+ \to 0$. Аналогично оценивается $\int \mathrm{tr}\, \partial_\mu g_t\, \partial^\mu g_t^+$: интеграл по области $0 \leqslant \theta < \pi(1-t)$ убывает как t^2 (функция растягивается, а мера области ограничена), а интеграл по остальной части ведет себя как t^3/t^2 (функция сжата, а мера области $\sim t^3$). Значит, $g_t \to I$ в топологии G_1^2. Эти соображения применимы и к сфере S^n. В норме $\|\cdot\|_{p,\,k+1}$ лидирующий вклад даст интеграл от $(k+1)$-й производной по окрестности южного полюса. Поскольку ее мера $\sim t^n$, а производная входит в степени p, имеем $\|g_t - I\|_{p,\,k+1} \to 0$ при $p(k+1) < n$. Таким образом, при переходе через границу (1) топологический запрет на глобальную калибровку снимается. Однако при этом возникает принципиально другой объект: исчезает структура гладкого расслоения, как исходного, на котором поля были связностями, так и бесконечномерного, порождаемого действием группы G на неприводимых полях.

Рассмотрим пространство L^2 квадратично суммируемых полей со скалярным произведением $(A, B) = \int \mathrm{tr}\, A_\mu B^{\mu +}$. Работы [3,4] основаны на выделении из порождаемых G орбит тех полей, которые наиболее близки в L^2-метрике к некоторому фиксированному полю B. Заметим, что если бы экстремальная точка на орбите оказалась единственной, это означало бы построение глобальной калибровки. Вычисление первой вариации, которую надо понимать относительно гладких подгрупп (1), немедленно дает, что экстремальные поля удовлетворяют фоновому условию $D(B)(A-B)=0$. Однако прежде всего надо убедиться, что они существуют. В [4] это принято без доказательства, а аргументация [3] недостаточна. Покажем, что в L^2 экстремум достигается. Рассмотрим орбиту A_0^g, $g \in G_1^2$. Обозначим $a = \inf_g \|A_0^g - B\|$ и выделим на орбите точки $A_i = A_0^{g_i}$ такие, что $\|A_{i+1} - B\| \leqslant \|A_i - B\|$, $\lim \|A_i - B\| = a$. Последовательность A_i ограничена по норме L^2 и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Слабый предел обозначим A. Расстояние от A до B не превосходит a, поскольку сильно замкнутый шар замкнут и слабо. Поэтому надо убедиться лишь в том, что хотя бы один из слабых пределов лежит на орбите A_0. Из формулы

$$\partial_\mu g_i = g_i A_\mu^i - A_\mu^0 g_i \tag{2}$$

видно, что последовательность g_i ограничена по норме $\|\cdot\|_{2,1}$. Выберем и из нее слабо сходящуюся подпоследовательность. Предел обозначим g. Для подпоследовательностей используем те же обозначения A_i, g_i. В силу леммы Реллиха [5] $g_i \to g$ по норме $\|\cdot\|_2$. Это и позволяет доказать $A = A_0^g$. Действительно, возьмем скалярное произведение (2) с полем ϕ, считая его гладким и с малым носителем. Затем перейдем к пределу. Слева получим $(\partial_\mu g, \phi_\mu)$ в силу слабой сходимости g_i. Второе слагаемое справа по той же причине даст $(A_0 g, \phi)$. Первое представим как $(g_i - g)A_i + gA_i$. Тогда $(gA_i, \phi) \to (gA, \phi)$ в силу слабой сходимости A_i, а $(g_i - g, \phi_\mu A_i^{\mu +}) \to 0$ в силу леммы Реллиха, так как $\|\phi_\mu A_i^{\mu +}\|_2 \leqslant C$. Поскольку ϕ указанного вида всюду плотны, A и A_0^g совпадают как элементы L^2. Таким образом, каждое поле с конечной L^2-нормой можно перевести преобразованием из G_1^2 на плоскость $D(B)(A-B)=0$.

Покажем теперь, что фоновое условие не является для L^2 калибровкой даже локально. Именно: какую бы L^2-окрестность B мы не взяли, в ней найдутся удовлетворяющие ему разные калибровочно эквивалентные поля. В случае пространств (1), напротив, для достаточно малой окрестности это невозможно [6]. Как и прежде, достаточно рассмотреть $SU(2)$-теорию и кулоновскую калибровку $(B = 0)$. Воспользуемся обозначениями работы Грибова [1] и возьмем „сферически симметричное" поле

$$A_j(x) = f(r)\,\hat{n}\,\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_j}\,. \tag{3}$$

Здесь $\hat{n} = i \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{x_j}{r} \sigma_j$, σ_j – матрицы Паули. Поле (3) удовлетворяет условию поперечности $\partial_j A_j = 0$. Применим к нему преобразование $g = \exp\{\alpha(r)\,\hat{n}\}$. Прямое вычисление дает $\|A\|^2 = 16\pi \int f^2(r)\,dr$ и

$$\|A^g\|^2 = \|A\|^2 + 16\pi \int [(2f + 1)\sin^2\alpha + \alpha'^2 r^2]\,dr\,. \tag{4}$$

Нетрудно указать поля (3) сколь угодно близкие к $B = 0$, для которых интеграл (4) можно сделать отрицательным. При этом экстремальная точка орбиты, также удовлетворяющая условию поперечности, лежит еще ближе к $B = 0$. Положим $f(r) = -\theta(r_0 - r)r^{-\beta}$, где $0 < \beta < 1/2$, а θ – ступенчатая функция. Очевидно, $\|f\|_2 \to 0$ при $r_0 \to 0$. Возьмем $\alpha(r) = \alpha_0(r/\epsilon - 1)$, где α_0 – стандартная колоколообразная функция с носителем в интервале $(-1, 1)$, и будем считать $\alpha_0 < \pi/2$. Тогда $\alpha \geqslant \sin\alpha \geqslant 2\alpha/\pi$. При $\epsilon \to 0$ положительная часть интеграла (4) убывает линейно по ϵ, а отрицательная как $\epsilon^{1-\beta}$ и доминирует. Рассуждение сохраняет силу при замене f на λf с любым $\lambda > 0$. Значит, множество экстремальных точек орбит, которое очевидным образом выпукло и замкнуто, не является поглощающим, т.е. натянутое на него линейное подпространство не покрывает плоскость $\partial_j A_j = 0$.

Таким образом, топология перестраивается ниже границы (1), и эту границу нужно учитывать при определении истинного конфигурационного пространства неабелевой теории.

Автор глубоко благодарен Б.Л.Воронову и В.Я.Файнбергу за полезное обсуждение.

Литература

1. *Грибов В.Н.* В сб.: Физика элементарных частиц. XII школа ЛИЯФ, Л.: ЛИЯФ, 1977; *Gribov V.N.* Nucl. Phys., 1978, **B139**, 1.
2. *Singer I.M.* Comm. Math. Phys., 1978, **60**, 7.
3. *Семенов-Тян-Шанский М.А., Франке В.А.* В сб.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 3, Л.: Наука, 1982, стр. 159.
4. *Zwanziger D.* Phys. Lett., 1982, **114B**, 337; Nucl. Phys., 1982, **B209**, 336.
5. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях, М.: Мир, 1971.
6. *Uhlenbeck K.K.* Comm. Math. Phys., 1982, **83**, 31.

Физический институт
Академии наук СССР
им. П.Н.Лебедева

Поступила в редакцию
25 августа 1983 г.