Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 9, стр. 427 – 430 *10 ноября 1983 г.*

САМОФОКУСИРОВКА МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.Ю.Манин, В.И.Петвиашвили

Выводятся упрощенные уравнения, описывающие эволюцию пучка акустических волн при распространении в среде с положительной дисперсией от стационарного источника. Показано на примере быстрой магнитозвуковой волны, что такой пучок может самофокусироваться.

Нелинейные эффекты при распространении быстрой магнитозвуковой волны (БМЗ) впервые были рассмотрены в работах Каплана и Станюковича [1], где показано, что в одномерном случае БМЗ опрокидывается, и Сагдеева [2], в которой учтена дисперсия и найден солитон, возникающий в результате опрокидывания. Позднее в работе [3] было показано, что в среде с положительной дисперсией одномерные солитоны неустойчивы. Дисперсия БМЗ всегда положительна при достаточно высокой температуре ионов: $\beta > m_e/m_i$, где $\beta = 4\pi nT / B^2$. В этом случае трехмерный волновой пакет БМЗ не образует одномерного солитона, а коллапсирует или расплывается. Если же имеется ограниченный по радиусу пучок БМЗ, то естественно ожидать, что при достаточно большой интенсивности он будет самофокусироваться подобно световому пучку в нелинейной среде. Как будет видно из дальнейшего, этот эффект действительно имеет место, однако количественное описание самофокусировки (СФ) БМЗ существенно отличается от описания СФ света из-за другого характера нелинейности (СФ диспергирующего звука происходит на обертонах, а света – на биениях). Получим уравнения, описывающие стационарный пучок БМЗ, распространяющийся поперек магнитного поля. Дисперсионное уравнение БМЗ при $B \parallel z$, $k_y, k_z \ll k_x$, $\omega < \omega_B (m_i/m_e)^{1/2}$ имеет вид

$$\omega = k_x c_A [1 + r_B^2 k_x^2 / 2 + (k_y^2 + k_z^2)/ 2k_x^2 + r_A^2 k_z^2 /2] ; \tag{1}$$

$$c_A^2 = B^2/4\pi n m_i\,; \quad \omega_B = eB/m_i c\,; \quad r_A = c_A/\omega_B\,; \quad r_B^2 = T/m\,\omega_B^2\,.$$

Отсюда видно, что при $\omega > \omega_B$ начинает сказываться анизотропия, вносимая последним членом. Главные нелинейные поправки к волновому уравнению для БМЗ были найдены в работах [1, 2]. Из них и из (1) методами работы [3] можно получить упрощенное уравнение, описывающее эволюцию во времени трехмерного волнового пакета, и показать аналогично [4], что такие пакеты не могут быть устойчивыми. Однако для задачи о СФ удобнее несколько изменить вывод работы [3] чтобы описывать стационарное во времени распространение звукового пучка. Тогда получим уравнение, аналогичное уравнению КП [3]:

$$(\partial_x h + 2hh' + h''' + \partial_z^2 h'/\beta)' = \Delta_\perp h. \qquad (2)$$

Здесь введены безразмерные переменные: $\tau = x/r_B - \omega_B t$; x, y, z заменены на x/r_B, y/r_B, z/r_B; и безразмерная функция $h = B_\sim/B$, где $B_\sim$ – магнитное поле волны. Штрих обозначает производную по τ. Уравнение (2) описывает распространение вдоль оси x волн от границы при $x = 0$, на которой задано периодическое по времени граничное условие, локализованное в плоскости y, z.

В работах Уизема [5] показано, что для задачи с начальным условием можно упростить уравнение КдФ с помощью некоторой процедуры усреднения по "быстрой" переменной τ. В нашем случае при усреднении приходится учитывать два дополнительных условия – постоянство частоты (основной) периодического источника, сохраняющейся вдоль луча, и равенство нулю среднего от h по τ. Поэтому усредненное уравнение получается здесь несколько другим методом последовательных приближений. Уравнение (2) имеет двухпараметрическое семейство одномерных периодических решений, выражающихся через эллиптические функции Якоби с квадратом модуля $k^2 = m$ (см. [6]):

$$h_0 = a\,\mathrm{cn}^2(b\tau + \theta(x)) + c, \qquad (3)$$

где $a, b, \partial_x\theta, c$ выражаются через m и основную частоту источника посредством следующих формул:

$$b = K(m)\,\omega/\pi\,; \quad a = 12b^2 m\,;$$

$$c = -a\,[E(m)/mK(m) - (1-m)/m\,]\,; \qquad (4)$$

$$\partial_x\theta = 4b^2(2m-1) - c\,.$$

Здесь $K(m)$, $E(m)$ – полные эллиптические интегралы, а частота ω берется в единицах $\omega_B\beta^{-1/}$
Возьмем в качестве нулевого приближения к пространственно-неоднородному решению (2) функцию h_0, в которой будем считать m зависящим от координат x, y, z. Этим мы задаем h на границе при $x = 0$ в виде суммы временных гармоник, составляющих эллиптическую функцию, что делает СФ монотонной. При этом дисперсионный член в (2) порядка нелинейного. В работе [7] рассматривалась СФ в условиях малой нелинейности. При этом она, естественно, происходила медленнее. Для первого приближения из (2) получается следующее линейное уравнение:

$$h_1 + h_0 h_1 + h_1'' = \Delta_\perp \tilde{\tilde{h}}_0 - \partial_z^2 h_0 - [d\tilde{h}_0/dx - h_0(b + \partial_x\theta)] \equiv F, \qquad (5)$$

где волна обозначает первообразную по τ. Это уравнение имеет решение

$$h_1 = h_0' \int (h_0')^{-2} \{\int F h_0'\, d\tau\}\, d\tau\,, \qquad (6)$$

которое может быть ограниченным только при условии

$$\langle F h_0' \rangle = 0, \qquad (7)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по τ. Это и есть искомое усредненное уравнение. Подставляя F из (5) в (7) и интегрируя по частям, найдем

$$\partial_x <h_0^2> + \partial_y(<h_0^2>\partial_y\theta) + \partial_z\{[<h_0^2> + <(h_0')^2>/\beta]\,\partial_z\theta\} = 0. \qquad (8)$$

Не выписывая явные зависимости от m ввиду их громоздкости, введем обозначения $I(x,y,z) = <h_0^2> = \Phi(m)$, $\partial_x\theta = \Psi(m)$, $\partial_y\theta = v_y(x,y,z)$, $(<h_0^2> + <(h_0')^2>/\beta)\partial_z\theta = v_z(x,y,z)$, $<(h_0')^2> = \Xi(m)$, $\mathbf{v} = (v_y, v_z)$, $\mathrm{div}_\perp = (\partial_y, \partial_z)$. Тогда для I и $\mathbf{v}$ получаем систему уравнений

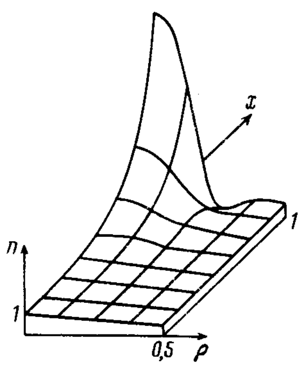
$$\begin{cases} \partial_x I + \mathrm{div}_\perp(I\mathbf{v}) = 0; \\ \partial_x v_y = \partial_y f(I);\ \ \partial_x(v_z g(I)) = \partial_z f(I); \end{cases} \qquad (9)$$

где функции f и g определяются следующими соотношениями:

$$f(\Phi(m)) = \Psi(m) > 0; \quad g(\Phi(m)) = [1 + \Xi(m)/\beta\Phi(m)]^{-1}. \qquad (10)$$

Система (9) напоминает уравнения динамики сжимаемого газа с отрицательным давлением. Она удобна для машинного счета, более наглядна, чем исходное уравнение и не содержит „быстрой" переменной τ. В частности, для малых m имеем: $m \ll 1$,

$$\begin{aligned} &I = <h_0^2> \approx \omega^4 m^2(1 + 4m/3); \quad f(I) \approx 2\sqrt{2I} - 2I/\omega^2; \\ &\partial_x\theta \approx \omega^3(3m - 1), \quad g(I) \approx [1 + (\omega^2 - 2\sqrt{2I}/3)/\beta]. \end{aligned} \qquad (11)$$



Центральная часть фокусирующегося пучка при граничном условии: $I_0 = \exp(-\rho^2)$, $\rho^2 = y^2 + z^2/(1+\omega^2/\beta)$ (в безразмерных единицах)

При этом система становится гамильтоновой. Из соображений подобия сразу получаем с учетом (11) оценки характерных длин L_y, L_z сжатия пучка по осям y, z через начальную безразмерную интенсивность I_0: $L_y \sim R_y(I_0/8)^{1/4}$; $L_z \sim R_z(I_0/8(1+\omega^2/\beta))^{1/4}$. Для пучка эллиптического сечения с отношением полуосей $R_z/R_y = \sqrt{1+\omega^2/\beta}$, для которого $L_y = L_z$, т. е. который фокусируется в точку, на рисунке показан результат численного счета. Для лабораторной плазмы самое выгодное направление – перпендикулярно магнитному полю, когда длина дисперсии минимальна, и поэтому площадь источника может быть небольшой. При этом частота должна быть много больше ω_B. Необходимая для СФ интенсивность получается большой, но ее можно создать в импульсном режиме. В результате СФ в малой области вблизи фокуса будет происходить поглощение. При небольшом отклонении от перпендикулярного к **B** распространения энергию будут поглощать ионы, движущиеся в направлении этого отклонения. Линейные формулы поглощения приведены в [8], однако, по-видимому важнее нелинейное поглощение.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* "Электродинамика сплошных сред", М.: Наука, 1982, с. 331.
2. *Сагдеев Р.З.* В: "Вопросы теории плазмы", т. 4, под ред. Леонтович М.А., Атомиздат, 1964.
3. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* ДАН СССР, 1970, **192**, 753.

4. *Кузнецов Е.А., Турицын С.К.* ЖЭТФ, 1982, 82, 1457.

5. *Уизем Дж.* "Линейные и нелинейные волны", М.: Мир, 1977.

6. "Справочник по специальным функциям", под ред. М.Абрамовица и И.Стиган, М.: Наука, 1979.

7. *Ozhogin V.I., Manin D.Yu., Petviashvili V.I., Lebedev A.Yu.* IEEE Trans. Magn. MAG-19, sept., 1983.

8. *Каладзе Т.Д., Пятак А.И., Степанов К.Н.* Физика плазмы, 1981, 7, 986.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
19 августа 1983 г.