Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.9, стр. 454 – 458 *10 ноября 1983 г.*

О КВАНТОВАНИИ ХОЛЛОВСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Д.Е.Хмельницкий

Дано качественное объяснение экспериментально наблюдаемого квантования холловской проводимости σ_{xy} в единицах $e^2/2\pi\hbar$ для двумерных систем в магнитном поле. Объяснение основано на формулировке теории локализации в терминах ренормгруппы. Несовпадение σ_{xy} с $ne^2/2\pi\hbar$ ($\delta\sigma_{xy}$) при конечных температурах связано только с наличием диссипативной проводимости σ_{xx} ($|\delta\sigma_{xy}| = \alpha\sigma_{xx}$, где α – число порядка единицы).

1. Экспериментальное исследование холловской проводимости σ_{xy} в двумерных системах в сильном перпендикулярном магнитном поле H показывает, что при низких температурах зависимость $\sigma_{xy}(H)$ имеет ряд плато, на которых σ_{xy} равно целому кратному $e^2/2\pi\hbar$. Уже в ранних работах [1,2] отмечалась поразительная точность, с которой выполняется это квантование. Усилиями ряда авторов [3] было достигнуто качественное понимание, но вопрос о теоретических ограничениях точности оставался нерешенным и было понятно, что исчерпы-

вающая теория явления должна одновременно описывать как квантование σ_{xy}, так и андерсоновскую локализацию двумерных электронов в случайном потенциале примесей.

В теории локализации уже несколько лет успешно развивается метод Q-поля. С помощью этого метода вычисление любой величины, например, коррелятора плотностей, сводится к вычислению функционального интеграла [4]

$$K_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int DQ(\mathbf{x})\, \frac{1}{4}\, \mathrm{Sp}[(1+\Lambda)Q(\mathbf{r})(1-\Lambda)Q(\mathbf{r}')] \exp\left(\int d\mathbf{x}\, F\right) / \int DQ(\mathbf{x}) \exp\left(\int d\mathbf{x} F\right)\Big|_{N=0}, \quad (1)$$

где для случая электрона в магнитном поле [1)]

$$\int d\mathbf{r}\, F\{Q\} = \int d\mathbf{r}\ \mathrm{Sp}\left\{-\frac{2\pi\hbar}{e^2}\sigma_{xx}(\vec{\nabla}Q)^2 - \frac{\pi\hbar}{2e^2}\sigma_{xy}\, Q[\nabla_x Q, \nabla_y Q] - i\omega\tau(\Lambda Q)\right\}, \quad (2)$$

а Q — эрмитовская матрица $2N \times 2N$, удовлетворяющая условиям

$$Q^2 = 1, \quad \mathrm{Sp}\, Q = 0 \quad (3)$$

Λ — диагональная матрица $2N \times 2N$, у которой N первых чисел на диагонали равны 1, а остальные равны -1.

2. Условия (3) означают, что все возможные значения Q отвечают точкам грассманова многообразия $M = U(2N)/[U(N) \times U(N)]$. Когда координата $\mathbf{r}$ пробегает все точки плоскости, значения Q заполняют некоторую область A на M. Гомотопическая классификация отображений плоскости на M дается группой $\pi_2(M)$. В соответствии с общими правилами

$$\pi_2(U(2N)/U(N) \times U(N)) = \pi_2(SU(2N)/S[U(N) \times U(N)]) =$$

$$= \pi_1(S[U(N) \times U(N)]) = \pi_1(SU(N)) + \pi_1(SU(N)) + \pi_1(U(1)/Z_2) = Z. \quad (4)$$

Формулу (4) можно проинтерпретировать так: Q является обобщением матрицы плотности $\rho(\epsilon,\epsilon') = \psi(\epsilon)\,\psi^*(\epsilon')$, отвечающей двум уровням энергии ϵ и ϵ'; $\rho(\epsilon\ \epsilon')$ допускает преобразование фаз волновых функций $\psi(\epsilon) \to \psi(\epsilon) e^{i\phi(\epsilon)}$, $\psi(\epsilon') \to \psi(\epsilon') e^{i\phi(\epsilon')}$, но физически различными являются только преобразования с различными $\phi(\epsilon) - \phi(\epsilon')$. Поэтому стационарная подгруппа грассманова многообразия M всегда содержит группу изменения фазы $U(1)$, и классификация отображений плоскости на M совпадает с классификацией отображений окружности на $U(1)$. Последние характеризуются изменением ϕ при обходе окружности, которое равно $2\pi n$, где n — целое число. Таким образом, матричная функция $Q(\mathbf{r})$ задает при всех N отображение плоскости на M, которое характеризуется целым числом n (кратностью отображения), являющимся топологическим инвариантом. Замечательно, что при любом N [5]

$$\int d\mathbf{r}\ \mathrm{Sp}\,\{Q[\nabla_x Q, \nabla_y Q]\} = 8\pi i n. \quad (5)$$

Поэтому в теории поля с действием (2) все значения σ_{xy}, отличающиеся на целое кратное $e^2/2\pi\hbar$, эквивалентны.

[1)] Вывод последнего члена в правой части (2) проведен в еще не опубликованной работе Пруискена (ссылка в [5]).

3. Осудим, что происходит, когда производится ренормировка, т.е. когда в зависимости $Q(\mathbf{r})$ выделяется часть Q_0, медленно зависящая от координат $(Q = U^+ Q_0 U)$, а по быстро изменяющимся унитарным матрицам U производится интегрирование. При этом σ_{xx} и σ_{xy} ренормируются, подчиняясь уравнениям

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\xi} = \beta_{xx}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}); \quad \frac{d\sigma_{xy}}{d\xi} = \beta_{xy}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}); \quad \xi = \ln\frac{L}{r_H}. \tag{6}$$

Уравнения (6) описывают зависимость σ_{xx} и σ_{xy} от линейных размеров образца L при $T = 0$. В качестве начальных условий, определяющих σ_{xx} и σ_{xy} образца с размерами порядка магнитной длины r_H, следует выбрать их значения, вычисленные с помощью кинетического уравнения. Так как действие (2) не изменяется при добавлении к $\sigma_{xy} e^2/2\pi\hbar$, β_{xx} и β_{xy} периодичны как функции σ_{xy} с периодом $e^2/2\pi\hbar$. Очевидно также, что изменение знака магнитного поля и, следовательно, изменение знака σ_{xy} не может сказаться на характере решений (6). Поэтому β_{xx} – четная функция σ_{xy}, а β_{xy} – нечетная.

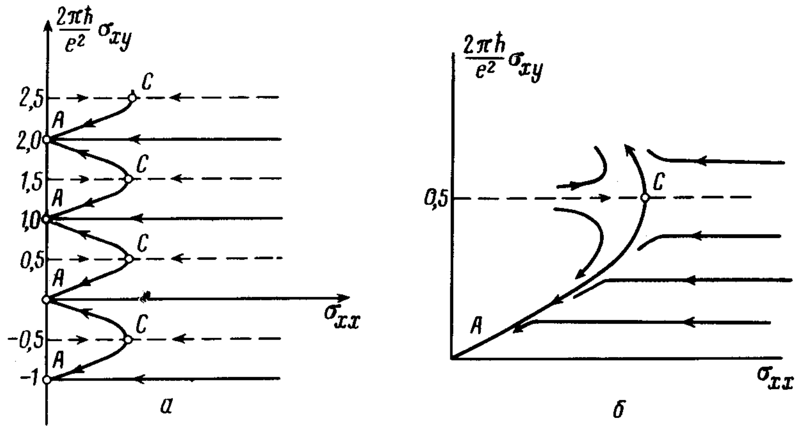

Рис. 1. Сепаратрисы и фиксированные точки *(а)* и интегральные кривые *(б)* системы уравнений ренормгруппы (6)

На рис. 1, *а* изображен фазовый портрет системы (6). Этот портрет периодически повторяется в каждой из полос $\frac{e^2}{2\pi\hbar} n < \sigma_{xy} < \frac{e^2}{2\pi\hbar}(n+1)$. Комбинируя симметрию относительно изменения знака σ_{xy} и периодичность по σ_{xy}, убеждаемся, что фазовый портрет в каждой из полос симметричен относительно средней линии $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{4\pi\hbar}(2n+1)$.

В рамках теории возмущений (т. е. при $\sigma_{xx} \gg e^2/\hbar$) σ_{xy} не ренормируется и не влияет на ренормировку σ_{xx}. Поэтому при $\sigma_{xx} \gg e^2/\hbar$ интегральные кривые (6) не зависят от σ_{xy} и изображаются линиями, параллельными оси абсцисс. При $\sigma_{xy} = 0$ т. е. в отсутствии магнитного поля, в двумерной неупорядоченной системе происходит локализация, и поэтому соответствующая интегральная кривая (6) совпадает с осью абсцисс и заканчивается в начале координат, которое является фиксированной точкой уравнений (6). Такими же фиксированными точками являются точки A $(0, e^2 n/2\pi\hbar)$. В силу симметрии средняя линия каждой полосы $\sigma_{xy} = (e^2/4\pi\hbar)(2n+1)$ является интегральной кривой системы уравнений (6). Как было показано в [5], полуцелому значению $2\pi\hbar\sigma_{xy}/e^2$ отвечает ненулевая проводимость σ_{xx}. На языке группы перенормировок это означает, что на прямой $\sigma_{xy} = (e^2/4\pi\hbar)(2n+1)$ имеется устойчивая фиксированная точка C при $\sigma_{xx} \neq 0$.

Естественно предположить, что точка C является седлом и неустойчива относительно ухода от средней линии полосы. Сепаратриса связывает C с устойчивой точкой A. Тогда все интегральные кривые, кроме средней линии полосы, оканчиваются в A, как показано на рис. 1, *б*. Результаты ренормировки σ_{xy} и σ_{xx} изображены схематически на рис. 2, *а*, *б*. При этом кривые *1* отвечают зависимости σ_{xy} и σ_{xx} от H, полученным с помощью кинетического уравнения. Кривые *2* отвечают конечным L, а кривые *3* – $L \to \infty$.

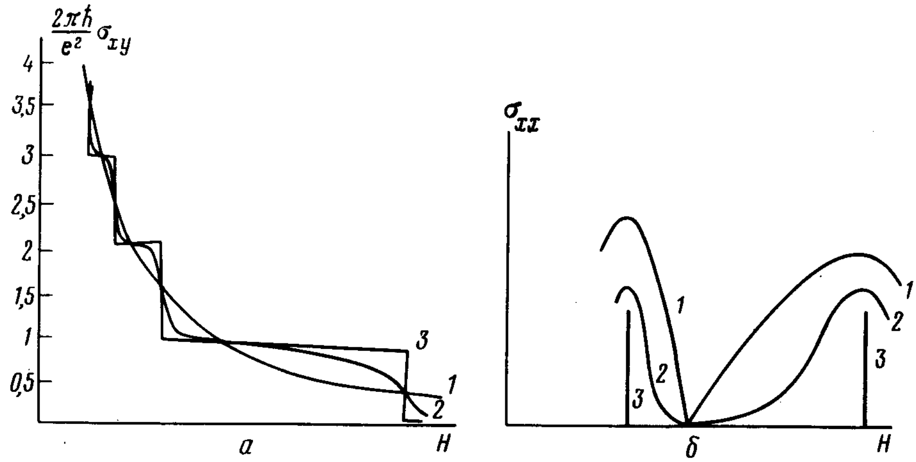

Рис. 2. Результаты ренормировки σ_{xx}(*а*) и σ_{xy} (*б*)

При конечной температуре $T \neq 0$ возможны неупругие процессы, которые приводят к конечной проводимости σ_{xx}. Поэтому каждой T отвечает длина $L(T)$, такая, что при $L \ll L(T)$ ренормировка осуществляется согласно уравнениям (6), а при $L \gg L(T)$ σ_{xx} и σ_{xy} перестают зависеть от L. При $T \to 0$ $L(T) \to \infty$. Таким образом, кривые рис. 2, *а*, *б* отвечают также экспериментальным зависимостям σ_{xy} и σ_{xx} от H при высоких температурах (кривые *1*), умеренно низких (кривые *2*) и при $T = 0$ (кривые *3*).

4. Для описания формы плато в зависимостях $\sigma_{xy}(H)$ необходимо детально проанализировать вид фазового портрета вблизи точки A. Эта область отвечает малым занчениям σ_{xx}. Рассмотрим поэтому электронный газ с концентрацией $n_e \ll eH/\hbar c$. При $T = 0$ электроны занимают уровни энергии, относящиеся к самой нижней части уровня Ландау, уширенного из-за рассеяния на примесях. Соответствующие этим уровням волновые функции локализованы. Соответствующие им длины локализации L_c порядка r_H и с точностью до $\hbar c n_e/eH$ слабо зависят от n_e. При больших линейных размерах образца L σ_{xx} и σ_{xy} пропорциональны e^{-L/L_c}. При этом отношение $\alpha = \sigma_{xy}/\sigma_{xx}$ не зависит не только от L, но и от n_e. Это значит, что интегральная кривая системы уравнений (6), отвечающая дну первой подзоны Ландау, является прямой $\sigma_{xy} = \alpha\sigma_{xx}$, и вне зависимости от концентрации электронов, значения σ_{xx} и σ_{xy} при $L = r_H$ принадлежат этой прямой. Для других подзон при $L = r_H$ точки $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ лежат правее линий $|\sigma_{xy} - e^2 n/2\pi\hbar| = \alpha\sigma_{xx}$. При этом существуют две возможности: либо прямые $|\sigma_{xy} - e^2 n/2\pi\hbar| = \alpha\sigma_{xx}$ вблизи точек A совпадают с устойчивыми сепаратрисами и тогда при $T \to 0$

$$| \sigma_{xy} - \frac{e^2 n}{2\pi\hbar} | = \alpha \sigma_{xx} \tag{7}$$

как это изображено на рис. 1, *б*, либо эти сепаратрисы неустойчивы и тогда $|\sigma_{xy} - e^2 n/2\pi\hbar| : \sigma_{xx}$ зависит от номера n.

Зависимость (7) для $n = 1$ недавно наблюдалась [6]. При этом, несмотря на значительную асимметрию плато, α на правом и левом его крыльях совпадали и не зависели от T. Измерения α при $n \neq 1$ дадут возможность уточнить форму сепаратрисы AC, которая определяет теоретическую точность измерения $e^2/\hbar$ с помощью эффекта Холла. Важную информацию могут дать также результаты численного моделирования.

Предлагаемая теория предсказывает, что относительная ширина плато при $T \to 0$ достигает 100%, а проводимость σ_{xx} при полях H, отвечающих скачку σ_{xy}, равна универсальному значению порядка $e^2/\hbar$.

5. Необходимо отметить, что для квантования σ_{xy}, в принципе, не обязательно выполнения условия $\omega_c\tau >> 1$. При $\omega_c\tau << 1$ достаточно, чтобы $E_F\omega_c\tau^2/\hbar >> 1$, однако при этом $\sigma_{xx} \sim e^2 E_F \tau/\hbar^2 >> e^2/\hbar$, и, следовательно, андерсоновская локализация и квантование σ_{xy} наступят только при очень низкой температуре. Аналогичным образом, использование инверсионных слоев, а не пленок толщиной в сотни Å связано не с принципиальными причинами, а только с возможностью наблюдать квантование σ_{xy} при реально достижимых температурах.

Выражение для действия (2), строго говоря, можно вывести либо при $\omega_c\tau << 1$ и $E_F\tau >> \hbar$, либо при $\omega_c\tau >> 1$, но $E_F/\hbar\omega_c >> 1$ и в предположении, что потенциал примесей является гауссовым. Однако представляется, что вывод о точном квантовании σ_{xy}, основанный на топологических соображениях, имеет более широкую область применимости, чем строгий вывод (2). Для учета электрон-электронного взаимодействия, а также многодолинного спектра носителей, необходимо модифицировать теорию, что будет сделано в дальнейшем.

Автор благодарен С.Либби за присылку препринта и Ю.А.Бычкову, А.И.Ларкину, Э.И.Рашба и М.В.Энтину за обсуждения результатов.

Литература

1. *Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.* Phys. Rev. Lett., 1980, **45**, 494.
2. *Tsui D.C., Gossard A.C.* Appl. Phys. Lett., 1981, **37**, 550.
3. *Aoki H., Ando T.* Solid State Comm., 1981, **38**, 1079; *Laughlin R.B.* Phys. Rev., 1981, **B23**, 5632; *Halperin B.I.* Phys. Rev., 1982, **B25**, 2185.
4. *Wegner F.* Zf Phys., 1979, **B35**, 207; *Ефетов К.Б., Ларкин А.И., Хмельницкий Д.Е.* ЖЭТФ, 1980, **79**, 1120; *Hikami S.* Phys. Rev., 1981, **B24**, 2671.
5. *Levine H., Libby S., Pruisken A.* Preprint, 1983.
6. *Пудалов В.М., Семенчинский С.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, 173.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 октября 1983 г.