Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 9, стр. 465 – 469 *10 ноября 1983 г.*

СПОНТАННАЯ СТОХАСТИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЯНГА – МИЛЛСА

А.М.Семихатов

Квантовые средние в четырехмерной теории Янга – Миллса представлены в каждом топологическом секторе как средние по развивающейся в „четвертом" евклидовом времени диффузии, уравнениями Ланжевена которой являются стохастические уравнения дуальности в калибровке $A_4 = 0$.

1. В настоящей работе предлагается новый подход к вычислению квантовых средних в четырехмерной теории Янга – Миллса ($YM(\mathbb{R}^4)$) в калибровке $A_4 = 0$ [1)], основанный на представлении $YM(\mathbb{R}^4)$ как результата стохастического квантования некоторой трехмерной теории, лагранжианом которой является 3-форма Черна – Саймонса (см. [1], прилож. 3). Конкретно, рассмотрим в присутствии внешнего источника в $YM(R^3 \times [t', t''])$ матричный элемент вида

$$< A'', t'' | A', t' >^J = < A'' | \exp(-\hat{H}(t'' - t')) | A' >^J =$$

$$\int\limits_{A(t')=A',\, A(t'')=A''} DA_i \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{t'}^{t''} dt \int d^3x (\dot{A}_i^a \dot{A}_i^a + B_i^a B_i^a) + \int d^4x\, J_i^a(x) A_i^a(x) \right\}, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, 3,$

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j + g[A_j, A_k]),$$

---

1) Если помнить, что теория получена продолжением из пространства Минковского, то $\mathbb{R}^4 \ni x = (\mathbf{x}, x^4)$, где x^4-евклидово время t, дифференцирование по которому в дальнейшем обозначается точкой. Ориентация пространства $\mathbb{R}^4$ выбрана, так, что $\epsilon_{1234} = 1$.

и $A'(\mathrm{x})$ и $A''(\mathrm{x})$ – заданные полевые конфигурации, разностью чисел Черна – Саймонса $C' = C[A']$ и $C'' = C[A'']$ которых определяется топологический заряд $q = C'' - C'$ тех полей $A_i(x)$, которые дают вклад в интеграл (1). Здесь

$$C[A] = \frac{1}{8\pi^2} \int d^3 x\, \epsilon_{ijk} \operatorname{tr}(A_i \partial_j A_k + \frac{2}{3} g A_i A_j A_k).$$

Рассмотрим сначала случай $q \geqslant 0$. Тогда в данном q-м топологическом секторе янг-милловское действие ограничено снизу значением $S_{\mathrm{Cl}} = 8\pi^2 q/g^2$, которое достигается только на инстантоне – решении уравнений дуальности, записываемых в выбранной калибровке как

$$\dot{A}_i = -B_i .$$

2. Квантовые флуктуации вокруг решений этих нелинейных классических уравнений могут быть описаны стохастизацией последних путем введения в них случайной силы $\eta_i^a(\mathrm{x}, t)$, являющейся белым шумом : стохастические уравнения дуальности имеют вид [2)]

$$\dot{A}_i = \eta_i - B_i , \quad A_i(\mathrm{x}, t') = A_i'(\mathrm{x}), \tag{2}$$

причем усреднение всех зависящих от η выражений производится в соответствии с

$$<\eta^{\otimes(2k+1)}> = 0, \quad <\eta_i^a(\mathrm{x}, x^4)\, \eta_j^b(\mathrm{y}, y^4)> = \delta^{ab}\delta_{ij}\, \delta^{(4)}(x-y)$$

и по теореме Вика для мономов высших четных степеней.

Уравнения (2) можно рассматривать как уравнения Ланжевена, описывающие диффузию с аддитивным шумом и потенциальной дрейфовой силой

$$B_i^a[A(\mathrm{x})] = -8\pi^2 \delta C[A]/\delta A_i^a(\mathrm{x}).$$

Основное утверждение состоит в совпадении, с точностью до множителя $\exp(-S_{\mathrm{Cl}})$, функций Грина, получаемых из (1), и корреляционных функций диффузионного процесса (2). Точнее, имеет место равенство

$$<A'', t''|A', t'>^J = e^{-8\pi^2 q/g^2} <\delta(A(t'') - A'')\exp\int_{t'}^{t''} dt \int d^3 x\, A_i^a J_i^q>, \tag{3}$$

где среднее в правой части – это среднее по введенной диффузии и A_i^a выражено через η с помощью (2).

Для того, чтобы проследить факт указанного совпадения, удобно перейти к конденсированным обозначениям $\phi^i = A_i^a(\mathrm{x})$, в которых уравнение типа (2) записывается как

$$\dot{\phi}^i(t) = \eta^i(t) - b^i(\phi), \quad \phi^i(t') = \phi'^i. \tag{4}$$

Теперь среднее в правой части (3) принимает вид (с точностью до нормирующего множителя)

$$\zeta(J) \equiv <\delta(\phi^i(t'') - \phi''^i)\exp\int_{t'}^{t''} \phi^i(t) J^i(t)\, dt> =$$

---

2) Отметим, что уравнения (2), переписываемые в лоренц- и калибровочно-ковариантном виде как $\frac{1}{2}\bar{\eta}_{i\mu\nu}F_{\mu\nu} = \eta_i$, где $\bar{\eta}_{i\mu\nu}$ – матрицы 'т Хоофта [2], порождают уравнения Янга – Миллса с током $I_\mu = \bar{\eta}_{i\lambda\mu}\nabla_\lambda \eta_i$. При этом $\nabla_\mu I_\mu = \bar{\eta}_{i\lambda\mu}\frac{1}{2}[F_{\mu\lambda}, \eta_i] = -[\eta_i, \eta_i] = 0$.

$$= \int D\eta \exp\left(-\frac{1}{2}\int dt\, \eta^i(t)\,\eta^i(t)\right)\delta(\phi(t'')-\phi'')\exp\int_{t'}^{t''}\phi^i(t)\,J^i(t)\,dt,$$

где $\phi^i(t)$ определяется из (4). Следуя работе [3], получаем отсюда

$$\zeta(J) = \int_{\phi(t')=\phi',\ \phi(t'')=\phi''} D\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t'}^{t''} dt\,(\dot\phi^i\dot\phi^i + b^i b^i - \partial_i b^i) - \right.$$

$$\left. -(S)\int_{t'}^{t''} b^i\, d\phi^i\right)\exp\int_{t'}^{t''}\phi^i(t)\,J^i(t)\,dt, \qquad (5)$$

где $(S)\int$ означает стохастический интеграл Стратоновича (его определение, мотивированное дифференциально-геометрическими структурами, свойства и сравнение с интегралом Ито в геометрической формулировке, а также дальнейшие ссылки содержатся в [4]). Фундаментальным свойством (S)-интеграла является формула Ньютона – Лейбница [3)]

$$(S)\int_{t'}^{t''}\partial_i c\, d\phi^i = c(\phi'') - c(\phi'),$$

использование которой в (5) для потенциальной дрейфовой силы $b^i = \partial_i c$, дополнительно удовлетворяющей в теории Янга – Миллса соотношению $\partial_i b^i = 0$, завершает доказательство формулы (3).

3. Если $q < 0$, то следует начать с уравнения антидуальности $\dot A_i = B_i$. Соответственно во всех формулах меняется знак перед $C[A]$, так что $S_{\rm Cl} = 8\pi^2\,(C' - C'')/g^2 = 8\pi^2|q|/g^2$ по-прежнему > 0.

Таким образом, в зависимости от топологического сектора теории имеем уравнения

$$A_i + \alpha B_i = \eta_i\,, \qquad (6)$$

в которых $\alpha = \pm 1$. Значение q топологического заряда определяет способ построения теории возмущений в (6): именно, полагаем $A_i = \bar A_i + Q_i$, где $\bar A$ – (анти-) инстантон с заданным топологическим зарядом, а флуктуации Q на этом фоне определяются в виде ряда по степеням η.

При этом 0-инстантонный сектор можно описывать с помощью любого из двух стохастических уравнений дуальности (6). Так, в терминах фурье-компонент (при $t' \to -\infty$, $t'' \to +\infty$)

$$A(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}A(\mathbf{x},t)$$

уравнение (6) переписывается в приспособленном для итераций виде

$$A_i^a(k) = S_{ij}(k)\left[\eta_j^a(k) - \frac{\alpha}{2}\epsilon_{jkl}f^{abc}g\int d^4p\, A_k^b(k-p)\,A_l^c(p)\right],$$

$$S_{ij}(k) = \frac{\omega}{i}D_{ij}(k) + \frac{i\alpha\,\epsilon_{imj}k_m}{\mathbf{k}^2+\omega^2}\,, \qquad D_{ij}(k) = \frac{\delta_{ij} + k_ik_j/\omega^2}{\mathbf{k}^2+\omega^2}\,,$$

---

3) Аналог этой формулы для исчисления Ито нетривиален, см. [4,3].

где использованы четырехмерные обозначения $k = (\mathbf{k}, \omega)$. Для парной корреляционной функции получаем отсюда в низшем порядке теории возмущений

$$< A_i^a(k) A_j^b(k') > = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \delta(k + k') S_{im}(k) S_{jm}(k').$$

Однако

$$S_{im}(k) S_{jm}(-k) = D_{ij}(k)$$

и потому $(2\pi)^{-4} \delta^{ab} D_{ij}(k)$ является свободным пропагатором, что совпадает с результатом, следующим из (1). Аналогичным образом, для тройной корреляционной функции находим

$$< A_i^a(k_1) A_j^b(k_2) A_k^c(k_3) > = \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(k_1 + k_2 + k_3)(-\alpha \epsilon_{lnp}) \times$$

$$\times g f^{abc} S_{il}(k_1) D_{nj}(k_2) D_{pk}(k_3) + \text{цикл} \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}.$$

Относительно пропорциональной α части этого выражения можно показать, используя условие $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, что она тождественна собственному удвоению и потому равна нулю. Используя, далее, равенство

$$\epsilon_{lmi} k_m / (\mathbf{k}^2 + \omega^2) = \epsilon_{lmn} k_m D_{in}(k),$$

получаем

$$< A_i^a(k_1) A_j^b(k_2) A_k^c(k_3) > = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \delta(k_1 + k_2 + k_3) D_{kk'}(k_3) D_{ii'}(k_1) D_{jj'}(k_2) \Gamma^{abc}_{i'j'k'}(k_1, k_2, k_3),$$

где

$$\Gamma^{abc}_{ijl}(k, p, q) = -igf^{abc}(2\pi)^4 (\delta_{ij} k_l + \delta_{jl} p_i + \delta_{li} q_j),$$

что совпадает с результатом, получаемым из (1). Нетрудно также убедиться, что диффузия устроена так, что $< \nabla_i \acute{A}_i > = 0$.

4. Таким образом, ценой потери явной релятивистской инвариантности нам удалось формально представить квантовые флуктуации в $YM(\mathbb{R}^4)$ в виде отклика *квадратично* нелинейного дифференциального уравнения *первого* порядка на белый шум. Следующим необходимым шагом является проверка эквивалентности перенормированных теорий возмущений в предлагаемом подходе и в обычной формулировке $YM(R^4)$. Представляет также интерес вопрос о возможности описания „спонтанной стохастизации' в релятивистски-инвариантных калибровках. Наконец, при бесконечном числе цветов белый шум может быть реализован в рамках процедуры „замороженных импульсов" [5], что открывает возможность проведения программы „замораживания" в уравнении (6).

Я благодарен В.Я.Файнбергу за подробные обсуждения работы и полезные замечания, а также М.Водзицкому и Н.С.Масловой за указание мне соответственно работ [4] и [3] и комментарии к ним.

Литература

1. *Chern S.S.* Complex manifolds without potential theory. Springer, Berlin: 1979.
2. *'t Hooft G.* Phys. Rev. D, 1976, 14, 3432.
3. *Hunt K.L.C., Ross J.* J. Chem. Phys., 1981, 75 (2), 976.

4. *Meyer P.A.* Géométrie differentielle stochastique sans larmes, dans: Lecture Notes in Math., 1981, 851; A differential geometric formalism for the Itô calculus, in: Lecture Notes in Math., 1981, 850.

5. *Greensite J., Halpern M.B.* Nucl. Phys., 1983, B211, 343.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 сентября 1983 г.