Письма в ЖЭТФ, том 38, вып. 10, стр. 508 – 510 *25 ноября 1983 г.*

О СПИНОРНОЙ СТРУКТУРЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВ

Д.В.Волков

Рассматривается реализация супералгебры $OSp(1,4)$ на основе канонически сопряженных спинорных переменных с противоположной грассмановой градуировкой. Устанавливается связь канонических спинорных переменных с координатами x^{μ} и θ^{α} суперпространства де Ситтера.

Идея о том, что геометрические свойства пространства и времени обусловлены простейшими структурными элементами, которые являются спинорами, неоднократно высказывалась в литературе (см. например, [1]) и в применении к суперпространствам – [2, 3]).

Здесь мы на примере суперпространства де Ситтера с супергруппой преобразований $OSp(1,4)$ рассмотрим, каким образом свойства суперпространств могут быть определены на основе использования спинорных переменных.

Введем два четырехмерных вещественных спинора η^{α} и y_{α} соответственно с антикоммутирующими и коммутирующими компонентами и определим следующим образом скобку Пуассона для функций от этих спиноров (см., например, [4]) :

$$\{A,B\} = A\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_{\alpha}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \eta^{\alpha}}B - A\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^{\alpha}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_{\alpha}}B. \tag{1}$$

Из (1) следуют соотношения градуировки:

$$\{A,B\} = C, \qquad a+b=c+1, \tag{2}$$

перестановочные соотношения

$$\{A,\ B\} = -(-1)^{(a+1)(b+1)}\{B,A\} \tag{3}$$

и тождества Якоби:

$$(-1)^{(a+1)(c+1)}\{A,\{B,C\}\} + (-1)^{(b+1)(a+1)}\{B,\{C,A\}\} + (-1)^{(c+1)(b+1)}\{C,\{A,B\}\} = 0. \tag{4}$$

Непосредственно для переменных η^{α} и y_{β} скобка (1) имеет вид $\{y_{\beta},\eta^{\alpha}\} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. В соотношениях (2) – (4) a, b и c означают грассманову градуировку величин A, B и C, соответственно. Если от грассмановой градуировки величин A, B и C перейти к новой их градуировке $\widetilde{a}=a+1$, $\widetilde{b}=b+1$ и $\widetilde{c}=c+1$, то в этой новой градуировке, которую мы будем называть физической, соотношения (2) – (4) примут форму соотношений для супералгебры Ли.

По отношению к скобкам Пуассона (1) степенные функции от спиноров η^{α} и y_{α} образуют бесконечномерную супералгебру Ли.

В зависимости от того, является число сомножителей y_{α} в степенных функциях нечетным или четным, их физическая градуировка соответствует правильной или неправильной связи спина функций с видом перестановочных соотношений для них. Легко видеть, что функции с правильной связью спина со статистикой (такие функции будем называть паулиевскими) образуют замкнутую супералгебру Ли. Функции вида $y_{\alpha}f(\eta)$ являются паулиевскими. Такие функции образуют замкнутую конечную супералгебру. 32 четных элемента этой супералгебры содержат подалгебру $GL(4,R)$ и 16 трансляций. 32 нечетных элемента являются генераторами собственно суперпреобразований.

Супералгебра функций $y_\alpha f(\eta)$ содержит много различных подалгебр и их неэквивалентных представлений, которые представляют интерес с точки зрения релятивистской теории суперсимметрии, в частности:

а) супералгебру $SL(4, 1/R)$ с генераторами $iy_\alpha \eta^\beta$, $y_\alpha, i\eta^\alpha(\eta y)$ $((\eta y) \equiv \eta^\alpha y_\alpha)$, которая является суперобобщением алгебры $O(3, 3)$ (заметим, что по отношению к группе $O(3, 3)$ η^α и y_α являются двумя неэквивалентными майорано-вейлевскими спинорами).

б) супералгебру $OSp(1, 4)$ которая получается из $SL(4, 1/R)$ при дополнительном условии инвариантности относительно четных генераторов билинейной антисимметричной формы $C_{\alpha\beta} y^\alpha y'^\beta$.

Генераторы супералгебры $OSp(1, 4)$ имеют вид $\frac{i}{2}(y_\alpha \eta_\beta + y_\beta \eta_\alpha)$, $y_\alpha + i\kappa\eta_\alpha(y\eta)$, в определении которых для опускания спинорных индексов использовалась форма $C_{\alpha\beta}$.

В стандартных обозначениях генераторы супералгебры $OSp(1, 4)$ можно записать в виде

$$P_\mu = i\kappa\, \bar{\eta}\gamma_\mu y, \qquad M_{\mu\nu} = i\bar{\eta}\, \sigma_{\mu\nu} y, \tag{5}$$

$$Q_\alpha = y_\alpha + i\kappa\, \eta_\alpha (\bar{y}\eta) \tag{6}$$

стремлением параметра κ к нулю можно осуществить переход в (5) и (6) к супералгебре Пуанкаре.

Перейдем теперь к рассмотрению того, как на основе представления операторов (5) и (6) можно установить связь переменных η^α и y_α с обычными координатами суперпространства де Ситтера x^μ и θ^α.

Из (6) и (1) следует, что при преобразованиях генераторами Q_α

$$\delta\eta^\alpha = \{(a, Q), \eta^\alpha\} = a^\alpha - i\kappa\,(a\eta)\eta^\alpha \tag{7}$$

и

$$\delta\, y_\alpha = \{(aQ), y_\alpha\} = i\kappa\, [a_\alpha (\eta y) + y_\alpha (a\,\eta)]\,. \tag{8}$$

Если от y_α перейти к $\widetilde{y}_\alpha(y, \eta)$

$$\widetilde{y}_\alpha = y_\alpha + \frac{i\kappa}{2}[\eta_\alpha (y\eta) - y_\alpha(\eta^2)] + \frac{5}{32}\kappa^2\, y_\alpha(\eta^2)^2\,, \tag{9}$$

то

$$\delta\widetilde{y}_\alpha = if_{\alpha\beta}\widetilde{y}^\beta, \tag{10}$$

где

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} = -\frac{\kappa}{2}(a_\alpha\eta_\beta + a_\beta\eta_\alpha)\,(1 + \frac{i\kappa}{4}\eta^2).$$

Преобразования (7) соответствуют преобразованиям координат однородного пространства $OSp(1, 4)/Sp(4)$. Как следствие, переменные η^α можно отождествить с обычно используемыми грассмановыми переменными θ^α:

$$\theta^\alpha = \eta^\alpha. \tag{11}$$

Для установления связи переменных y_α с координатами x^μ заметим, что соотношения (10) определяют закон преобразования представления $OSp(1, 4)$-группы индуцированного спинорным представлением $Sp(4)$-группы.

Так как суперпреобразования координат x^{μ} определяются посредством представления $OSp(1,4)$-группы индуцированного пятимерным векторным представлением $SO(3,2)$-группы [5], а последнее эквивалентно антисимметричному тензорному представлению $Sp(4)$-группы, то связь между y_{α} и x^{μ} может быть установлена посредством соотношения

$$\tilde{y}_{\alpha}(y,\eta) = \kappa\, v_{\alpha\beta}(x)\, \tilde{y}^{\beta}(y,\eta), \tag{12}$$

где $v_{\alpha\beta}(x) = -v_{\beta\alpha}(x)$; $v^{\alpha}{}_{\alpha}(x) = 0$ и, как следствие (12), $v^{\alpha\beta}(x)\, v_{\beta\alpha}(x) = -4/\kappa^2$.

При наличии внутренней симметрии соотношение (12) полностью определяет зависимость координат $v_{\alpha\beta}$ от переменных $y_{\alpha i}$, $\eta_i^{\alpha}(i = 1, \dots N)$.

Отметим, что, как следует из (11) и (12), координаты θ^{α} и x^{μ} являются функциями антипаулиевского типа по отношению к скобке Пуассона (1). Заметим, также, что скобка Пуассона от θ^{α} и x^{μ} не равна нулю.

Отмеченные свойства x^{μ} и θ^{α} указывают на то, что в отличие от величин P_{μ}, $M_{\mu\nu}$ и Q_{α}, x^{μ} и θ^{α} не являются физическими операторами.

Основным и определяющим свойством координат x^{μ} и θ^{α} является их закон преобразования при преобразованиях соответствующих супергрупп. В функциональных же зависимостях различных величин от x^{μ} и θ^{α} играет роль только их грассманова градуировка, которая совпадает с обычной.

Как осуществить переход от классических скобок (1) к квантовым скобкам Пуассона в настоящее время представляется неясным.

Автор выражает благодарность В.П.Акулову, А.А.Желтухину, В.А.Сороке и В.И.Ткачу за полезные обсуждения.

Литература

1. *Penrose R., Mac Callum M.A.H.* Phys. Rep., 1972, **6**, 241.
2. *Ferber A.* Nucl. Phys., 1978, **B132**, 55.
3. *Lukierski J.* Lett. Nuovo Cim., 1979, **24**, 10.
4. *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: изд. МГУ, 1983.
5. *Zumino B.* Nucl. Phys., 1977, **B127**, 189.

Харьковский
физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 октября 1983 г.