Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 10, стр. 452 – 455 *20 мая 1982 г.*

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЙ ИНСТАНТОН

А.М.Семихатов

Предложено определение суперинстантона, базирующееся на твисторной интерпретации суперсимметричных уравнений Янга – Миллса. Построено соответствующее обобщение конструкции ADHM.

Среди решений вакуумных уравнений Янга –Миллса на $\mathbb{R}^4$ (или на $\mathbb{C}^4$ для голоморфной связности) естественно выделяются инстантоны – решения с (анти-) самодуальной формой кривизны. Размерность $n = 4$ базы главного расслоения, в котором задаются связности, при этом играет существенную роль. Оператор Ходжа $*$ отображает алгебру внешних форм на базе в себя, переводя p-формы в $(n - p)$-формы. Замечательным является то обстоятельство, что при $n = 4$ оказывается возможным записать уравнение $*F = \pm F$ для формы кривизны, а также то, что в силу тождества Бианки всякое решение уравнений дуальности удовлетворяет и уравнениям Янга –Миллса. Общее решение уравнений дуальности дается конструкцией ADHM [1,2].

Вопрос об обобщении хотя бы в каком-нибудь смысле понятия инстантона на суперсимметричную теорию Янга – Миллса является, таким образом, нетривиальным. Естественно было бы требовать от четно-четных компонент F, чтобы они по-прежнему удовлетворяли условию дуальности, но не очевидно, из каких соображений выбирать условия на остальные компоненты и следует ли добиваться выполнения суперсимметричных уравнений Янга –Миллса.

Кандидат на роль суперинстантона, описанный ниже, построен с использованием трактовки Виттена [3] суперсимметричных уравнений Янга – Миллса. Именно, рассматривая суперпространство $(x_{AA'}, \theta_{iA}, \theta^{iA'})$, $i = 1,...,N$, и суперсвязность $(A_{AA'}, \zeta_{Ai}, \zeta_{A'i})$, определим операторы

$$\nabla^{Ai} = \frac{\partial}{\partial\theta_{Ai}} + \theta^{A'i}\partial^{A}_{A'} + \zeta^{iA}, \tag{1a}$$

$$\nabla_{A'i} = \frac{\partial}{\partial\theta^{A'i}} + \theta_{Ai}\partial^{A}_{A'} + \zeta_{A'i}, \tag{1b}$$

и подчиним их соотношениям

$$\{\nabla_{A'i}, \nabla_{B'j}\} + \{\nabla_{B'i}, \nabla_{A'j}\} = 0, \tag{2a}$$

$$\{\nabla^{Ai}, \nabla^{Bj}\} + \{\nabla^{Bi}, \nabla^{Aj}\} = 0, \tag{2b}$$

$$\{\nabla_{Ai}, \nabla_{A'j}\} = 2\delta_{ij}\nabla_{AA'}, \tag{2c}$$

где $\nabla_{AA'} = \partial_{AA'} + A_{AA'}$. Тогда при $N=3$ суперсвязность удовлетворяет суперсимметричным уравнениям Янга – Миллса [3].

Более сильные условия, состоящие в (2b), (2c) и

$$\{\nabla_{A'i}, \nabla_{B'j}\} = 0, \tag{2d}$$

мы будем считать определяющими суперинстантон.

Мотивировка этого определения состоит в том, что из (2b, c, d) следует условие самодуальности $F_{AB} = 0$, где

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = F_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}F_{A'B'} + \epsilon_{A'B'}F_{AB}. \tag{3}$$

Для доказательства заметим, что, как следствие (2b, c, d)

$$[\nabla_{A'i}, \nabla_{BB'}] = (1/2N)[\nabla_{A'i}, \{\nabla_{Bj}, \nabla_{B'j}\}] = (1/2N)([\{\nabla_{A'i}, \nabla_{Bj}\}, \nabla_{B'j}] + [\{\nabla_{A'i}, \nabla_{B'j}\}, \nabla_{Bj}]) =$$

$$= (-1/N)[\nabla_{B'i}, \nabla_{A'B}] = (1/N^2)[\nabla_{A'i}, \nabla_{BB'}]. \tag{4}$$

Поэтому при $N > 1$ имеем

$$[\nabla_{A'i}, \nabla_{BB'}] = 0. \tag{5}$$

Аналогичным образом получается соотношение

$$[\nabla_{Ai}, \nabla_{BB'}] + [\nabla_{Bi}, \nabla_{AB'}] = 0. \tag{6}$$

Теперь мы можем установить, что

$$2F_{AB} = (1/2N)\{[\nabla^{B'}_{A}, \nabla_{Bi}], \nabla_{B'i}\}, \tag{7}$$

но в силу (6) это антисимметрично по индексам (A, B), в то время как $F_{AB} = F_{BA}$, откуда $F_{AB} = 0$.

Поле $A_{AA'}$ можно рассматривать как связность, заданную на $\mathbb{R}^4$ (голоморфную связность на $\mathbb{C}^4$), имеющую самодуальную форму кривизны и зависящую от некоторых дополнительных параметров $(\theta_{Ai}, \theta^{A'i})$. Но в этом случае $A_{AA'}$ порождается конструкцией ADHM, все ингредиенты которой также зависят от указанных нечетных переменных. Рассматривая для определенности k-инстантон в группе $SU(n)$ и следуя обозначениям статьи [2] получим, таким образом

$$A_{AA'}(x, \theta) = v^{+}(x, \theta)\partial_{AA'}v(x, \theta), \tag{8a}$$

$$v^+(x,\theta)\,\Delta^A(x,\theta)=0, \quad v^+(x,\theta)v(x,\theta)=1, \tag{8b}$$

$$\Delta^A(x,\theta)=a^A(\theta)+b_{A'}(\theta)x^{A'A}, \tag{8c}$$

$$P = vv^+ = 1-\Delta^A f\,\Delta^+_A, \quad \Delta^+_A\,\Delta^B=\delta^B_A f^{-1}. \tag{8d}$$

Но из соображений калибровочной ковариантности имеем

$$\zeta_{Ai} = v^+ D_{Ai}\,v, \qquad \zeta_{A'i} = v^+ D_{A'i}\,v, \tag{9}$$

где D_{Ai} и $D_{A'i}$ получаются из (1) при нулевой связности.

Для определения явной зависимости от θ в (8c) перепишем, используя (8a) и (9), требования (2b, c, d) соответственно как

$$v^+(\{D_{Ai}P, D_{Bj}P\}+\{D_{Bi}P, D_{Aj}P\})v=0, \tag{10b}$$

$$v^+\{D_{Ai}P, D_{A'j}P\}\,v=0, \tag{10c}$$

$$v^+\{D_{A'i}P, D_{B'j}P\}v=0. \tag{10d}$$

Эта система удовлетворяется при

$$\Delta^A(x,\theta)=a^A+b_{A'}(x^{A'A}+\theta^{A'i}\theta^{Ai})+c_i\theta^{Ai}, \tag{11}$$

где матрицы a^A, $b_{A'}$, c_i (последние – с нечетными элементами) уже не зависят от θ. В самом деле, используя (8b, d) при вычислении v^+dP, получим, что

$$v^+D_{A'i}P=0,$$

$$v^+\{D_{Ai}P, D_{Bj}P\}\,v\sim\epsilon_{AB}, \tag{13}$$

что при симметризации даст нуль в (10b).

Таким образом, определенный нами суперинстантон оказался суперинстантоном и в том смысле, какой следует из обобщения конструкции ADHM. Аналогично тому, как это имеет место в обычном случае, выражение (11) для Δ^A проистекает из линейного по супертвисторам [4] $(z_A, z^{A'}, \xi^i)$ оператора

$$A(z,\xi)=a^A z_A+b_{A'}z^{A'}+c_i\xi^i, \tag{14}$$

где супертвисторы связаны условиями инцидентности [4,5]:

$$z^{A'}=(x^{A'A}+\theta^{A'i}\theta^{Ai})z_A, \qquad \xi^i=\theta^{Ai}z_A. \tag{15}$$

Близость суперсимметричного варианта конструкции ADHM к обычному позволяет перенести на него всю "инстантонную технику", развитую в ряде работ [1, 2, 6].

Интересно также было бы попытаться связать возможность суперсимметричного обобщения конструкции ADHM со свойствами этой конструкции в четном случае.

Автор выражает признательность В.Я.Файнбергу за поддержку и обсуждение работы и Р.Э.Каллош за полезные обсуждения.

Литература

1. *Atiyah M.F., Hitchin N.J., Drinfeld V.G., Manin Yu. I.* Phys. Lett., 1978, **65A**, 185; *Drinfeld V.G., Manin Yu.I.* Comm. Math. Phys., 1978, **63**, 177; *Corrigan E., Fairlie D.B., Templeton S.* Nucl. Phys., 1978, **B140**, 31.
2. Osborn H. Nucl. Phys., 1978, **B140**, 45.
3. *Witten E.* Phys. Lett., 1978, **77B**, 394.
4. *Ferber.* Nucl. Phys., 1978, **B132**, 55.

5. *Henkin G.M., Manin Yu. I.* Phys. Lett., 1980, **95B**, 405.

6. *Berg B., Luscher M.* Nucl. Phys., 1979, **B160**, 281; *Corrigan E., Goddard P., Templeton S.* Nucl. Phys., 1978, **B151**, 93; *Mansfield P.* Nucl. Phys., 1981, **B186**, 287; *Семихатов А.М., Файнберг В.Я.* Препринт ФИАН №70, 1982.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 апреля 1982 г.