.исьма в ЖЭТФ, том 35, вып.12, стр. 535 –537 20 июня 1982 г

ДИНАМИЧЕСКАЯ $SO(3,1)$-СИММЕТРИЯ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ ДИРАКА

В.Л.Голо

Для классической заряженной бесспиновой частицы в поле магнитного монополя Дирака найдены новые интегралы движения, порождающие вместе с интегралами углового момента $SO(3,1)$-алгебру скобок Пуассона. Отмечается возможная связь найденной симметрии со структурой амплитуды рассеяния квантованной частицы.

Со времени появления работы Дирака [1], магнитному монополю посвящено значительное число работ (см. [2,3]), и содержащуюся там библиографию). К настоящему моменту достигнуто более глубокое понимание топологической природы магнитного заряда, динамики частиц в его поле и структуры амплитуды рассеяния [1–3].

В этом круге вопросов представляет интерес динамическая симметрия монополя. В данно статье для движения в поле монополя классической нерелятивистской заряженной частиць найден новый векторный интеграл **K**, порождающий вместе с вектором углового момента $SO(3,1)$ – алгебру скобок Пуассона. Эта алгебра отличается от $SO(3) \times SO(2,1)$-алге(ры, найденной Джэкивым,[8] поскольку последняя содержит величины, не коммутирующие гамильтонианом, в то время как интеграл **K** с ним коммутирует. Пока не удается написат квантовые аналоги полученных интегралов. Этому, из-за сложности аналитических выражений для интегралов, препятствует некоммутативность квантованных динамических переменных.

Уравнения движения классической заряженной бесспиновой частицы в поле монополя являются Гамильтоновой системой для координат r_i и обобщенных импульсов частицы

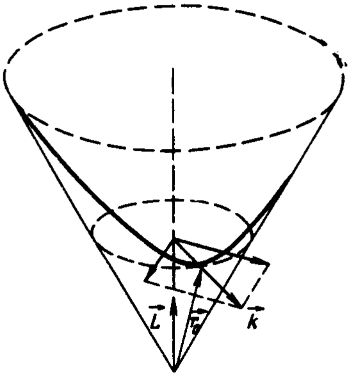
$$P_i = p_i - (eZ/c)A_i\,,\quad i = 1,2,3.$$

здесь p_i – импульсы, A_i – вектор потенциал магнитного поля монополя, [4]. Рассматривается движение с Гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\,\frac{p^2}{m}\,.$$

Скобки Пуассона для динамических переменных имеют вид

$$[\,r_i\,,\,r_j\,] = 0,\ [\,r_i\,,\,P_j\,] = \delta_{ij},\ [\,P_i\,,\,P_j\,] = \epsilon_{ijk}\,H_k\,. \qquad (1)$$



Траектория заряженной классической бесспиновой частицы в поле магнитного монополя, расположенная на конусе $\mathbf{L}\mathbf{r} = qr$ $\mathbf{r}_0$ – вектор из вершины конуса в ближайшую точку траектории. Вектора $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ортогональны оси конуса, параллельной вектору момента $\mathbf{L}$, $\mathbf{K}^2 = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = L^2 - q^2$

Здесь H_k – компоненты магнитного поля. Вектор углового момента $\mathbf{L}$ имеет вид, [4]

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} - q\mathbf{r}/r ,$$

где $q = eg/c$, g – магнитный заряд. Имеют место соотношения

$$[L_i, r_j] = \epsilon_{ijk} r_k, \ [L_i, P_j] = \epsilon_{ijk} P_k, \ [L_i, K_j] = \epsilon_{ijk} L_k . \qquad (2)$$

Известны интегралы движения, [4] энергии или просто P^2 углового момента $\mathbf{L}$ и $q = \mathbf{L}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Новые интегралы, указанные в настоящей работе, строятся следующим образом. Вводится величина, являющаяся интегралом движения (см. рисунок),

$$r_0^2 = P^{-2}(L^2 + q^2) .$$

Затем рассматриваются векторы

$$\mathbf{e}_1 = L\,\mathbf{n} - \cos\theta\,\mathbf{L} ,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{L} \times \mathbf{n},$$

где $\cos\theta = q/L$, L – модуль вектора $\mathbf{L}$. Имеют место равенства

$$[\mathbf{e}_\mu, P^2] = \epsilon_{\mu\nu} \frac{2L}{r^2} \mathbf{e}_\nu, \ \mu,\nu = 1,2 , \qquad (3)$$

Вводится вектор

$$\mathbf{K} = \cos\tau\ \mathbf{e}_1 + \sin\tau\,\mathbf{e}_2 ,$$

$$\tau = (L/Pr_0)\ \mathrm{arctg}((r/r_0)^2 - 1)^{1/2} .$$

Из формул (3) следует, что $[\mathbf{K}, P^2] = 0$, т.е. $\mathbf{K}$ – интеграл движения. Имеют место следующие формулы

$$[e^i_\mu, e^j_\mu] = -\epsilon_{ijk} L_k, \ \mu = 1,2,$$

$$[e^i_1, e^j_2] = L(\delta_{ij} - (\cos\theta/L)^2 L_i L_j), \qquad (4)$$

$$[\tau, \mathbf{e}_\mu] = \epsilon_{\mu\nu} \chi\, \mathbf{e}_\nu, \ \mu, \nu = 1,2,$$

$$\chi = P^{-2} r_0^{-2} (1+\cos^2\theta)^{-1} [-\cos^2\theta \operatorname{arctg}((r/r_0)^2 - 1)^{1/2} + (2/r^2)(r^2 - r_0^2)],$$

из которых следует, что

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} L_k, \; [L_i, K_j] = \epsilon_{ijm} K_m . \tag{5}$$

Из формул (2), (5) следует, что интегралы **L** и **K** порождают $SO(3, 1)$-алгебру Ли динамической симметрии монополя.

Методика, предлагаемая в настоящей статье, может быть перенесена на цветные монополя т'Хуфта – Полякова [5–7].

В заключение, автор пользуется приятной возможностью поблагодарить И.С.Шапиро, обратившего его внимание на этот круг вопросов, и В.Е.Маркушина за полезные дискуссии.

Литература

1. *Dirac P.A.M.* Proc. Roy. Soc., 1931, A133, 60.
2. *Wu T.T., Yang C.N.* Nucl. Phys., 1976, B107, 365.
3. *Schwinger J., De Raad, Milton Clark, Wu Jang-Tsai* Ann. Phys. (N.Y.), 1976, 101, 451.
4. *Швингер Ю.* Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1973.
5. *t'Hooft G.* Nucl. Phys., 1974, B79, 276.
6. *Поляков А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, 430.
7. *Corrigan E., Olive D.* Nucl. Phys., 1976, B110, 237.
8. *Jackiw R.* Ann. Phys..(N.Y.), 1980, 129, 183.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
11 мая 1982 г.